Universidade de Lisboa

As justificações matemáticas dos alunos no tópico Equações do 1.º grau no 7.º ano de escolaridade

Sara Filipa Estradas da Silva Nunes

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário

Relatório de Prática de Ensino Supervisionada

orientado pela

Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

e coorientado pela

Professora Doutora Maria da Purificação Antunes Coelho

2020

RESUMO

O estudo realizado neste relatório é resultado da minha intervenção letiva numa turma do 7.º ano de escolaridade do Colégio Militar, no tema Equações Algébricas. A intervenção que contemplou 11 aulas foi dividida em dois momentos, presencial e à distância, devido à pandemia COVID-19 que impediu a continuidade das aulas no regime presencial habitual. O estudo teve como objetivo analisar as justificações matemáticas dos alunos presentes em diferentes tipologias de tarefas (tarefas de exploração com vista à generalização, tarefas de resolução de equações, problemas envolvendo equações) da Unidade Didática de Equações Algébricas. Além disso, analisei também as representações utilizadas pelos alunos para expressar as justificações apresentadas. Outro objetivo do estudo foi também perceber as dificuldades associadas a este processo de raciocínio matemático. Os métodos de recolha de dados utilizados foram a recolha documental e as notas de campo tanto nas aulas presenciais como à distância, e a observação apenas nas aulas presenciais.

No primeiro momento de aulas, realizado presencialmente, composto por duas aulas, a abordagem de ensino foi exploratória, ou seja, aula organizada em quatro fases, introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização de ideias em grupo turma. No segundo momento, em ensino à distância, cada aula foi composta por dois momentos: um primeiro assíncrono, onde foram partilhadas com os alunos as tarefas a realizar através da plataforma Escola Virtual e um segundo síncrono através da plataforma Microsoft Teams. Na aula síncrona eram retiradas as dúvidas que surgiam relativamente às tarefas anteriormente partilhadas na aula assíncrona.

As justificações mais utilizadas pelos alunos, segundo os resultados do estudo, são as que se apoiam em propriedades ou procedimentos matemáticos, definições, hipóteses ou teoremas. Para expressar as justificações, os alunos recorrem predominantemente à linguagem natural ou à linguagem simbólica alfanumérica. Relativamente às dificuldades que emergem neste processo do raciocínio matemático, a principal prende-se com a resistência à justificação de procedimentos ou de estratégias, ou seja, quando para justificar não bastava apresentar cálculos ou procedimentos simbólicos.

Palavras-chave: justificação matemática; equações algébricas; ensino de matemática; 7.º ano.

ABSTRACT

The study carried out in this report is the result of my teaching intervention in a 7th grade class at Colégio Militar, on the subject of Algebraic Equations. The intervention that covered 11 classes was divided in two moments, presentially and remotely, due to the COVID-19 pandemic that prevented the continuity of classes in the usual presential regime. The aim of the study was to analyse the mathematical justifications of the students present in different types of tasks (exploring tasks with a view to generalisation, tasks of solving equations, problems involving equations) of the Didactic Unit of Algebraic Equations. In addition, I also analysed the representations used by the students to express the justifications presented. Another objective of the study was also to perceive the difficulties associated with this process of mathematical reasoning. The methods of data collection used were documentary collection and field notes in both presencial classes and remote classes, and observation in presence classes.

At first, when the classes were held presentially, which consisted in two classes, the teaching approach was exploratory, i.e. class organised in four phases, introduction of the task, autonomous work of the students, collective discussion and systematisation of ideas in group classes. In the second phase, in remote teaching, each class was composed of two moments: a first asynchronous class, where the tasks to be completed were shared with the students through the platform "Escola Virtual" and a second synchronous class through the platform "Microsoft Teams". In the synchronous class, the doubts that arose in relation to the tasks previously shared in the asynchronous class were clarified.

The justifications most used by the students, according to the results of the study, are those based on mathematical properties or procedures, definitions, hypotheses or theorems. In order to express the justifications, students predominantly use natural language or alphanumeric symbolic language. Concerning the difficulties that arise in this process of mathematical reasoning, the main one is related to the resistance to justifying procedures or strategies, i.e. when to justify it was not enough to present calculations or symbolic procedures.

Keywords: mathematical justification; algebraic equations; teaching of mathematics; 7th grade.

AGRADECIMENTOS

É inevitável começar estes agradecimentos pela Professora Doutora Hélia Oliveira pela sua imprescindível ajuda para que este relatório se realizasse, pela disponibilidade e apoio que sempre demonstrou. O encaminhamento e os comentários pertinentes e diretos permitiram dissipar dúvidas que foram surgindo e, desta forma, terminar esta etapa da minha vida.

Agradeço também à Professora Doutora Purificação Coelho pelos comentários sempre pertinentes, tecidos ao relatório, que me ajudaram na conclusão do mesmo.

Agradeço ainda e de forma especial, à professora Anabela Candeias por todo o apoio dado ao longo deste processo, pela forma como me acolheu e me integrou na sua vida profissional, tendo um papel essencial para que tenha concluído este relatório.

Agradeço ao Colégio Militar a oportunidade de estagiar nesta instituição, permitindo-me participar em todas as suas atividades letivas e não letivas.

Um agradecimento aos alunos do 7.º ano do Colégio Militar, em especial à minha turma que sempre me respeitaram e mostraram abertura e empenho em sala de aula contribuindo assim para o estudo que realizei.

Agradeço aos meus colegas de curso que muito me apoiaram nestes dois anos tão intensos.

Agradeço à minha família e amigos que fazem de mim o que sou hoje e que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida.

Termino estes agradecimentos com as pessoas mais importantes da minha vida, mãe, pai, irmã, Gonçalo, Gabriel e Ricardo, que estão comigo em todos os dias da minha vida, nos momentos mais difíceis e nos momentos mais felizes e que sem o apoio deles nada seria possível.

A todos, muito obrigada!

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto REASON, que tem o apoio de fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, Project REASON (contrato PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Índice

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

Capítulo 1 Introdução

A Álgebra constitui um dos cinco grandes temas transversais a todo o terceiro ciclo do ensino básico. Corresponde ao tema que muitos alunos intitulam como o mais difícil na disciplina de Matemática devido ao conjunto de regras e à linguagem que o caraterizam, constituindo uma barreira na sua aprendizagem de matemática (Wang, 2015), mas sendo reconhecido, nos vários documentos curriculares, como tendo um papel incontestável na formação matemática dos alunos (Oliveira, 2009). O documento das Aprendizagens Essenciais de Matemática no 7.º ano de escolaridade (DGE, 2018) indica que as ações do professor na lecionação do tema de Álgebra deverão possibilitar que "Os alunos prossigam no desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos, alargando e aprofundando o estudo das relações matemáticas" (p. 4).

Segundo, Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico inclui três vertentes, representar, raciocinar e resolver problemas. O raciocínio matemático é referido no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) e nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do 7.º ano de escolaridade (DGE, 2018), como um conteúdo de aprendizagem que o professor deve promover nos seus alunos e transversal a qualquer tema do programa de matemática. Têm sido identificados diferentes processos de raciocínio matemático, entre os quais se destacam conjeturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e validar argumentos através da justificação matemática (Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020).

Por considerar o raciocínio matemático um conteúdo de aprendizagem essencial nas aulas de Matemática para promover competências aos alunos, e por ter estado em contacto com o tema nas aulas de Metodologia do Ensino da Matemática, com recurso aos materiais do projeto REASON, achei que seria interessante explorar mais este tema e, mais concretamente, um dos seus processos, a justificação. Este processo foi escolhido porque, na lecionação de uma aula no âmbito da disciplina de Introdução à Prática Profissional III cujo objetivo foi a promoção do raciocínio matemático, foi este o processo que fez emergir mais dificuldades aos alunos. Assim, considero ser de extrema importância criar situações que promovam a justificação matemática dos alunos, melhorando-a, e de refletir sobre as ações do professor nesse sentido.

Diversos autores consideram que a justificação matemática é um processo que faz emergir muitas dificuldades aos alunos, na medida em que estes não o desenvolvem espontaneamente, pois com frequência, aceitam as conjeturas e generalizações como válidas sem sentirem a necessidade de justificar (Harel & Sowder, 2007). Para além disso, frequentemente, os alunos veem um padrão num conjunto de exemplos e assumem-no como verdadeiro e sem necessidade de o justificar (James, Casas & Grant, 2017).

A minha Prática de Ensino Supervisionada ocorreu no Colégio Militar, numa turma do 7.º ano de escolaridade, onde lecionei o conteúdo de Equações do 1.º grau, escolhido primeiramente tendo em conta a planificação anual do estabelecimento de ensino e, seguidamente, devido ao interesse que tenho no tópico e em trabalhá-lo utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem exploratório.

Durante a minha prática de ensino supervisionada houve uma interrupção letiva devido à pandemia COVID-19 que se instalou e que impossibilitou a continuidade do funcionamento das escolas nas condições habituais. Assim, a lecionação foi dividida em dois momentos, iniciou-se com aulas presenciais passando, posteriormente, a aulas à distância.

A lecionação da Unidade Didática das Equações do 1.º grau ocorreu num período de seis semanas aproximadamente, o que correspondeu a dez aulas com mais uma dedicada à avaliação sumativa. Das dez aulas, duas ocorreram presencialmente, onde foi possível aplicar a metodologia de ensino preferencial, ou seja, a exploratória. As restantes aulas ocorreram em ensino à distância onde, a aplicabilidade desta metodologia se torna bastante complicada devido ao menor apoio que é possível ser dado por parte do professor aos alunos.

O estudo em que assenta o presente relatório tem como objetivo caracterizar as justificações matemáticas dos alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade no contexto do tópico Equações do 1.º grau. Para concretizar este objetivo elaborei duas questões a que procurarei dar resposta com este estudo:

i. Que tipo de justificações matemáticas são realizadas pelos alunos?
ii. Que dificuldades revelam os alunos neste processo do raciocínio matemático e qual a sua origem?

Existem vários níveis de justificações matemáticas dos alunos que são progressivamente mais formais à medida que estes evoluem no nível de escolaridade que frequentam, bem como tendo em conta o seu conhecimento (Mata-Pereira & Ponte, 2018). Através de literatura de referência, que mencionarei mais à frente, irei caracterizar as justificações dos alunos que emergirem aquando da realização de tarefas que suscitem as mesmas, verificando a diversidade de justificações que surgem na turma.

Através da minha investigação, tentei ainda perspetivar as dificuldades dos alunos a justificar no tópico de Equações do 1.º grau e refleti sobre as ações do professor que podem ajudar os alunos a combater essas mesmas dificuldades.

Capítulo 2 Enquadramento Curricular e Didático

2.1 Álgebra e Pensamento algébrico

O surgimento das Aprendizagens Essenciais de Matemática (DGE, 2018), permitiu combater um pouco a visão da Álgebra como consistindo no trabalho com expressões, uma vez que enumera algumas práticas essenciais de aprendizagem que se suportam em situações de contextos variados, e não puramente matemáticos, apoiando uma aprendizagem matemática com sentido, bem como apela à utilização de tarefas de natureza diversificada e discussão das soluções obtidas. A ideia da Álgebra como um conjunto de regras de manipulação de expressões retira muita da riqueza que a mesma nos pode ilustrar e não permite responder à pergunta "O que é a Álgebra?" (Usiskin, 1988).

Segundo Ponte (2006), a natureza de cada campo da Matemática está relacionada com os objetos com que esse campo trabalha, nesse sentido, com que objetos trabalha a Álgebra? A resposta imediata é equações e expressões algébricas, mas não só. Ela envolve aspetos como, resolução de problemas, relações, estruturas algébricas, funções, inequações, etc. Kieran (2007) considera que a Álgebra pode mesmo ser entendida como uma forma de pensar e raciocinar, onde os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas.

No tema da Álgebra, o foco das Aprendizagens Essenciais de Matemática do 7.º ano de escolaridade (DGE, 2018) é o desenvolvimento da linguagem e pensamento algébricos e das relações matemáticas, deixando para segundo plano a manipulação de expressões algébricas e a resolução de equações. O pensamento algébrico é uma capacidade que deve ser desenvolvida nos alunos desde os primeiros anos de escolaridade (Oliveira & Mestre, 2014).

Mas o que é isto do pensamento algébrico? Kaput (1999) defende que ocorre pensamento algébrico quando os alunos exploram situações aritméticas para chegar à expressão e formalização de generalizações (Aritmética generalizada) e trabalham com regularidades numéricas para descrever e generalizar relações funcionais (pensamento funcional). Posto isto, a Álgebra é trabalhada através de conjeturas e argumentos que estabelecem generalizações com base nas experiências dos alunos e não pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica. O autor evidencia, ainda, a modelação como instrumento para formalizar generalizações.

São nomeadas por Kaput (1999) cinco facetas do pensamento algébrico (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Numa publicação posterior Kaput (2008), estabelece as duas primeiras como sendo aspetos nucleares e as restantes como ramos.

A perspetiva do NCTM (2007) vai ao encontro da de Kaput (1999), na medida em que aponta que, para desenvolver o pensamento algébrico, os alunos devem:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo de estruturas);
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos (Simbolização);
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação);
- Analisar a variação em diversos contextos (Estudo da Variação). (p. 39)

Temos ainda o "sentido de símbolo" (*symbol sense*), como refere Arcavi (1994), como um elemento essencial do pensamento algébrico. Este autor indica que o sentido de símbolo é uma apreciação rápida ou precisa, entendimento ou instinto em relação aos símbolos, ou seja, a capacidade de usar e interpretar de forma eficaz a simbolização. Tendo em conta a perspetiva dos vários autores mencionados, a ideia central do pensamento algébrico é a generalização: "descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos." (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 10),

Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) desenvolveram um estudo com o objetivo de promover o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. No 7.º ano, parte da experiência foi realizada no tópico de equações do 1.º grau. Os resultados obtidos evidenciam progressos significativos dos alunos ao nível da utilização de várias representações, as quais assumem um papel decisivo na aprendizagem na medida em que constituem importantes ferramentas para raciocinar matematicamente (NCTM, 2007). Houve ainda progressos ao nível da utilização de estratégias cada vez mais formais, representação de generalizações e também a compreensão da linguagem algébrica, cujo principal fator que o permitiu foi o trabalho com regularidades.

Como referi, as representações assumem um papel bastante importante na aprendizagem dos alunos, na medida em que, as ideias matemáticas para serem entendidas, explicadas ou discutidas devem ser representadas de alguma forma. Estas representações matemáticas podem mesmo ser consideradas como o "coração" do pensamento algébrico (Oliveira & Mestre, 2014). As representações podem ser externas ou internas. As representações internas correspondem às formas do pensamento do aluno. Estas não são diretamente observáveis. As representações externas são observáveis sendo expressas através de palavras, gráficos, imagens, equações, etc. Apesar, de observáveis, as representações externas são suscetíveis a interpretação pois dependem da representação interna de quem interpreta. As interações entre representações internas e externas são essenciais para o pensamento. Segundo Goldin (1998), os sistemas representacionais incluem os sistemas da linguagem falada, símbolos escritos, modelos figurativos e de imagens, modelos manipulativos e situações do mundo real.

Mestre (2014) elaborou um quadro onde categorizou os tipos de representação de modo a poder analisar as representações utilizadas por alunos em diversas tarefas. Na Tabela 1 apresento as categorias relativas aos tipos de representação elaboradas pela autora. É de salientar que Mestre (2014) indica que as categorizações presentes na Tabela 1 não possuem uma marcada hierarquia de sofisticação.

A primeira tipologia de representação que se observa na Tabela 1 é a linguagem natural, ou seja, quando os alunos recorrem a uma descrição verbal, escrita ou oral. De seguida, surge a linguagem numérica que se prende com o recurso a uma expressão numérica. A representação icónica diz respeito às imagens, gráficos, etc. A linguagem sincopada pré-simbólica ocorre quando os alunos recorrem simultaneamente à linguagem natural e à linguagem numérica, nomeadamente com uso de abreviaturas. Por fim, a linguagem simbólica diz respeito a um sistema simbólico regido por regras ou leis. A linguagem simbólica é ainda idiossincrática, quando recorre a simbologia própria, reproduzindo a ação do contexto do problema, ou alfanumérica, recorrendo a uma notação alfanumérica atendendo aos aspetos numéricos do problema.

Tabela 1: Categorias dos tipos de representação (Mestre, 2014, p. 118)

Tipos de representação	Linguagem natural		Usa uma descrição verbal, escrita ou oral.
	Numérica		Usa uma expressão numérica.
	Icónica	Desenhos	Usa desenhos.
		Tabelas	Usa tabelas.
		Diagramas ou esquemas	Usa diagramas (de setas, do modelo da balança,...) ou esquemas.
	Pré-simbólica	Sincopada	Usa uma linguagem sincopada.
	Simbólica	Idiossincrática	Usa símbolos próprios.
		Alfanumérica	Usa a notação alfanumérica.

A partilha de representações resultam em novas representações, entre as criadas idiossincraticamente e as convencionais, como tal, é essencial a resolução de problemas a pares ou em pequenos grupos, de modo a possibilitar trocas de resoluções, ideias e, consequentemente, representações (Mestre, 2014).

A par com as representações, a comunicação matemática também assume um papel essencial na consolidação dos conhecimentos e na promoção do pensamento algébrico dos alunos. Neste sentido, é essencial proporcionar momentos da aula dedicados à discussão e reflexão de ideias dos alunos, de modo a permitir o progresso de uma linguagem informal para uma linguagem mais formal, através de momentos onde estes se expressam, analisam outras formas de representação de estratégias e generalização de processos (Oliveira & Mestre, 2014).

Estes momentos propícios à comunicação matemática, permitem também o incentivo às justificações matemáticas igualmente importante para a promoção do pensamento algébrico, na medida em que os alunos recorrem a simbolização e representações para obterem uma generalização, no entanto, são necessárias justificações que fundamentem a generalização apresentada. Como referi, Kaput (1999) considera que a Álgebra é trabalhada através de conjeturas e argumentos, como tal, a justificação matemática assume aqui um papel fundamental na promoção do pensamento algébrico.

2.2 Equações Algébricas

No currículo de Álgebra, as Equações Algébricas é um dos tópicos fundamentais onde os alunos fazem a transição do raciocínio com números para o raciocínio com valores desconhecidos (Filloy & Rojano, 1989). No que diz respeito à resolução de equações do 1.º grau, para uma melhor compreensão e apreensão deste tópico, é necessário um progressivo aumento de dificuldade do tipo de equações que se apresenta aos alunos (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

Filloy e Rojano (1989) classificam as equações de 1.º grau com uma incógnita em duas categorias, consoante a presença da incógnita num ou em ambos os membros da equação. Às equações que podem ser escritas na forma Ax + B = C classificam de "equações do tipo aritmético" e às equações que se podem reduzir à forma Ax +B = Cx + D de "equações do tipo algébrico". Sendo que as equações do tipo aritmético têm um nível de complexidade inferior relativamente às equações do tipo algébrico. Estas duas categorias podem ainda ser subdivididas em vários tipos de equações com uma hierarquia de complexidade, nomeadamente:

1. $x + a = b$
2. $ax = b$
3. $ax + b = c$
4. $ax + c = bx + d$
5. $a(bx + c) = dx + e$
6. $\frac{bx+c}{a} = \frac{dx+e}{f}$
7. $\frac{a(bx+c)}{g} = \frac{d(ex+f)}{h}$

A equações apresentadas nos pontos 1 a 3 correspondem a equações do tipo aritmético e dos pontos 4 a 7 a equações do tipo algébrico.

Estreitamente relacionado com o tema de equações está a resolução de problemas. Branco (2008) no estudo que realizou, verificou que quando os alunos conseguiam resolver os problemas usando estratégias aritméticas, eram capazes, em seguida, de os representar por uma equação e resolvê-la, estabelecendo uma correspondência entre as operações aritméticas e as operações relativas à resolução formal dessa equação. No entanto, quando o problema era difícil de ser resolvido por meio de uma estratégia aritmética, os alunos sentiam muitas dificuldades em representar o problema por meio de uma equação. Quando o faziam com sucesso, facilmente adotavam estratégias corretas para a sua resolução e encontravam a solução. A autora verificou ainda que demonstraram resistência em usar equações na resolução de problemas, por se tratar de um processo mais formal.

2.2.1 Estratégias de resolução de Equações Algébricas

Muitas vezes, para a resolução de equações, principalmente as denominadas anteriormente como aritméticas, não é necessário recorrer à formalidade dos princípios de equivalência ou regra prática para se perceber qual poderá ser a solução de uma equação. Como tal, surgem estratégias distintas de resolução informal de equações.

Kieran (1992) identifica alguns métodos utilizados pelos alunos na resolução de equações onde apresenta tanto as estratégias formais (as duas últimas da tabela 2) como informais, e classifica-as da forma como apresento na Tabela 2.

Tabela 2: Estratégias de resolução de equações

Estratégia	Exemplo
Uso da Realidade	3 + n = 5 ; 5-3=2, logo n=2
Técnicas de contagem	3+n=5, os alunos podem contar 3,4,5, logo são necessárias duas unidades para ir do três ao cinco.
Cobertura (Cover-up)	$2x + 9 = 5x$; $2x + 9 = 2x + 3x; 9 = 3x$
Desfazer (Undoing)	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 14 \div 2 \Leftrightarrow x = 7$
Tentativa e erro	$2x + 4 = 18$; para $x = 5$, *vem* 14=18, o que não é verdade; para $x = 6$, vem 16=18, o que não é verdade; para $x = 7$, vem 18=18, logo $x = 7$.
Transposição (Mudar de membro, mudar de sinal)	$2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14$
Realização da mesma operação em ambos os membros	$\mathbf{2x + 4 = 18 \Leftrightarrow 2x + 4 - 4 = 18 - 4 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow 2x/2 = 14/2 \Leftrightarrow x = 7}$

2.2.2 Dificuldades no tópico de Equações Algébricas

É a falta de uma construção sólida de conceitos, métodos e procedimentos algébricos que faz emergir enormes dificuldades aos alunos no tema da Álgebra. O tópico de Equações do 1.º grau revela-se particularmente problemático para muitos alunos

(Ponte, 2004). É necessário trabalhar com estes expressões algébricas e equações de forma informal como 3 + _ = 5, bem como o significado das várias letras em Matemática, de modo a proporcionar aprendizagens significativas aos alunos e não mera a memorização de regras como “passa para o outro lado e troca o sinal”.

Kieran (1992), tendo por base o trabalho de Küchemann realizado com alunos, descreve seis níveis de interpretação da letra:

i. **Letra avaliada:** é atribuído um valor numérico à letra logo no início, sem qualquer operação sobre ela, enquanto incógnita;
ii. **Letra não considerada:** a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida, mas não lhe é atribuída significado;
iii. **Letra como objeto:** a letra é vista como abreviatura para objetos ou como objetos concretos;
iv. **Letra como incógnita:** a letra é entendida como um número específico, mas desconhecido;
v. **Letra como número generalizado:** a letra é entendida como uma representação de vários números;
vi. **Letra como variável:** a letra é entendida como representando um conjunto de valores desconhecidos e é percebida a existência de uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores.

É importante que os alunos reconheçam a diferença entre incógnita e variável. Se o conhecimento do significado das letras não for claro, os alunos terão muitas dificuldades na apropriação de conceitos e procedimentos algébricos.

Outra dificuldade que emerge, muitas vezes, no tópico de Equações é a necessidade de interpretar o sinal de igual como equivalência de duas expressões numéricas dado que, até então, os alunos apenas se tinham confrontado com o sinal de igual que implicava um resultado de uma operação (Otten et al., 2019). Assim, nesta fase esta ideia tem de ser alterada, o que faz emergir aqui uma dificuldade acrescida a este tópico. Ponte, Branco e Matos (2009) elaboraram uma tabela (Tabela 3) onde recolheram as dificuldades que mais se evidenciam no tópico de Equações do 1.º grau, tendo por base diversos autores.

Tabela 3: Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Erro\Dificuldade	**Exemplo**	**Autor**
Adição de termos que não são semelhantes **E** **Interpretação dos sinais '+' e '=' como indicadores de uma ação**	3+ 4n = 7n 2a + 5b = 7ab	Booth, 1984, 1988; Kieran, 1981, 1992; Küchemann, 1981; MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorreta de monómios do 1.º grau	Interpretação de 4y como: – quatro 'y 's'; – Um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – 4 + y por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$	Booth, 1984
Uso de parêntesis	3(x + 2) = 7x ⇔ 3x + 2 = 7x	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorreta de termos semelhantes	− 2x + 5x = 8 ⇔ −7x = 8	Kieran, 2006
Adição incorreta de termos não semelhantes	2x + 5 = x +8 ⇔ 7x = 9	Kieran, 1985

Transposição incorreta de termos	30 = x + 7 ⇔ 30 + 7 = x 7x = x +8 ⇔ 7−8 = x + x	Kieran,1985,1992
Redistribuição (Redistribution)	−2x +5 = 8⇔ −2x +5−5 = 8+5	Kieran, 1992
Eliminação	3x −3 = 2x − 4 ⇔ x = 2x −4	Kieran, 1992
Conclusão incorreta da resolução da equação	6x = 24 ⇔ 6 + x = 24 11x = 9x = $\frac{11}{9}$ 2x = 4 ⇔ i) x = 4 - 2; ii) x = $\frac{4}{-2}$; iii) x = $\frac{2}{4}$	Kieran,1985,1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

2.2.3 Método da Balança de Pratos

As regras práticas são uma abordagem que facilitam o processo de resolução de equações, no entanto, essencial que os alunos reconheçam de onde estas vêm e como se obtêm as mesmas. Um modelo usado desde há muito para o ensino dos princípios de equivalência e das regras práticas de resolução de equações é o modelo da balança de dois pratos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Já o filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) havia feito a conexão quando mencionou a relação entre a igualdade numa situação matemática e uma balança com igual peso em ambos os pratos (Otten et al., 2019).

Uma forma de ajudar os alunos a compreender a resolução de equações é através do uso de modelos como formas de pensar sobre conceitos abstratos, sendo salientado em vários artigos a importância de experiências físicas com objetos concretos para desenvolver a compreensão sobre equações algébricas (Otten et al., 2019). Desta forma, o modelo pode servir como representação de um problema matemático e, através de uma situação concreta fazer uma conexão com a Matemática formal.

Existem vários tipos de modelos da balança: modelo físico, onde se recorre a uma balança de pratos real (Figura 1), modelo virtual (Figura 2) e modelo desenhado (Figura 3) (Otten et al., 2019).

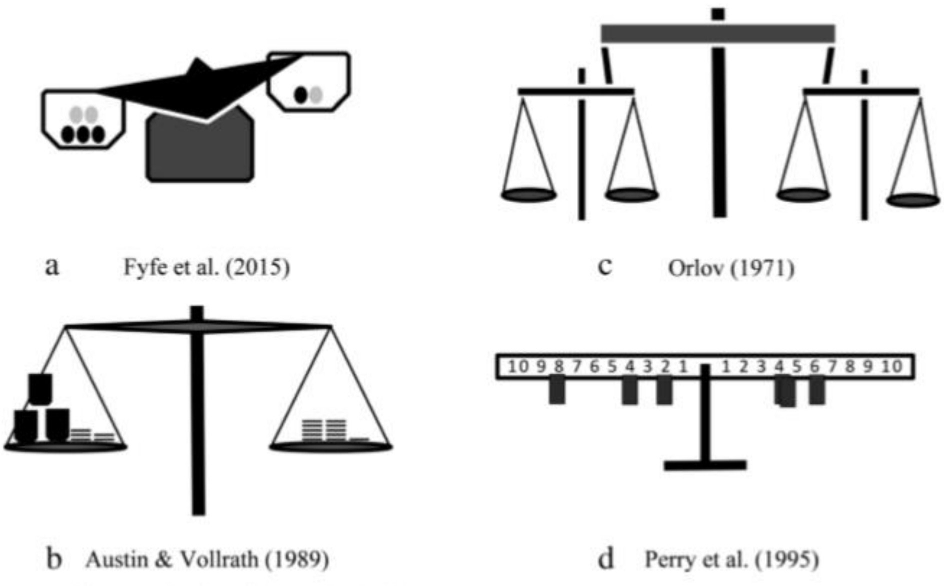


Figura 1: modelos físicos da balança, exemplos de quatro artigos (Otten et al., 2019, p.11)

Na Figura 1 estão apresentados vários modelos físicos de balanças de pratos. Na Figura 1a os alunos devem encontrar o valor que permite equilibrar a balança. Na Figura 1b devem descobrir o peso de cada lata preta. A Figura 1c é mais complexa porque contém quatro pratos e com este modelo é possível manipular também números negativos e desconhecidos. Por fim, na Figura 1d a distância dos objetos ao ponto de apoio pode ser adaptada para representar diversas equações algébricas. Neste modelo todos os objetos têm a mesma massa, no entanto, ao serem colocados numa determinada posição, representam um valor em particular.

Relativamente ao modelo da balança virtual, a maioria destes recursos exibe uma escala de equilíbrio bastante semelhante aos modelos de equilíbrio físico. No entanto, o ambiente digital apresenta mais possibilidades nas representações e funções do modelo (Otten et al., 2019).

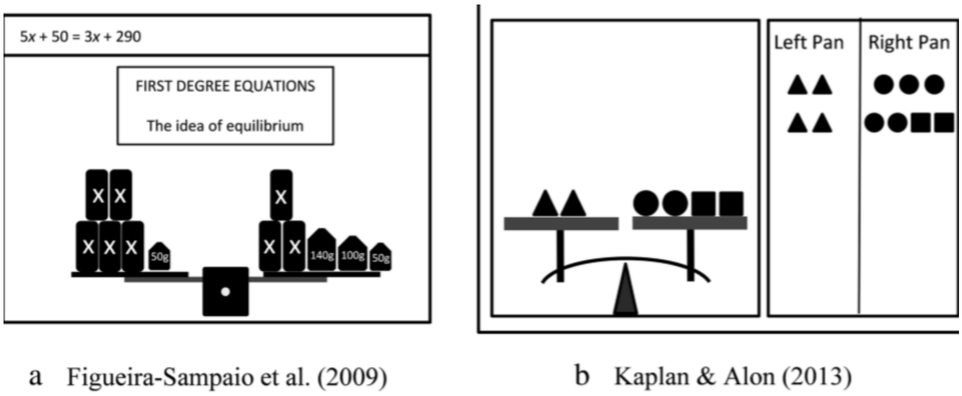


Figura 2: modelo da balança virtual, exemplos de dois artigos (Otten et al, 2019, p.12)

Na Figura 2 estão representados dois exemplos de modelos de balança virtual. O modelo Figura *2*a recorre a pesos com determinados valores e a latas cuja massa é representada pela letra x, correspondendo ao valor desconhecido. Aqui, enquanto os alunos manipulam a escala de equilíbrio virtual, a equação correspondente é mostrada em símbolos algébricos formais, o que torna explícita a ligação entre essas manipulações e as alterações na equação simbólica correspondente. O modelo da Figura *2*b é ligeiramente distinto dos que se encontram habitualmente. Neste modelo, os alunos podem explorar relações entre diferentes formas que representam incógnitas e encontrar novas equações baseadas nas que são dadas. Por exemplo, é dado que ▲▲= ●●● e que ▲▲=●●■■, uma terceira equação pode ser criada a partir destas.

Domingos (2016) procura descrever uma abordagem metodológica que recorre à exploração de *applets* (aplicações ou programas interativos) para potenciar o ensino e aprendizagem das equações do 1.º grau, no 7.º ano de escolaridade. Uma das *applets* à qual o autor recorreu inclui o modelo da balança virtual semelhante ao apresentado na Figura 2a. Neste estudo, Domingos (2016) indica que é possível observar que os alunos mostravam um bom desempenho na resolução algébrica das equações, antecipando os cálculos no papel, para garantirem que não tinham nenhum erro assinalado na *applet*. As *applets* podem ser ferramentas de aprendizagem motivadoras para os alunos, principalmente quando as tarefas a realizar assumem uma forte componente algébrica com questões muito rotineiras (Domingos, 2016).

Por fim, vários modelos da balança desenhados estão representados na Figura 3. Aqui, é percetível que alguns modelos de balança desenhados são representados de forma mais realista (Figura 3a – c) e outros mais esquematicamente (Figura 3d – f), com figuras de objetos ou expressões simbólicas para representar os valores conhecidos e desconhecidos.

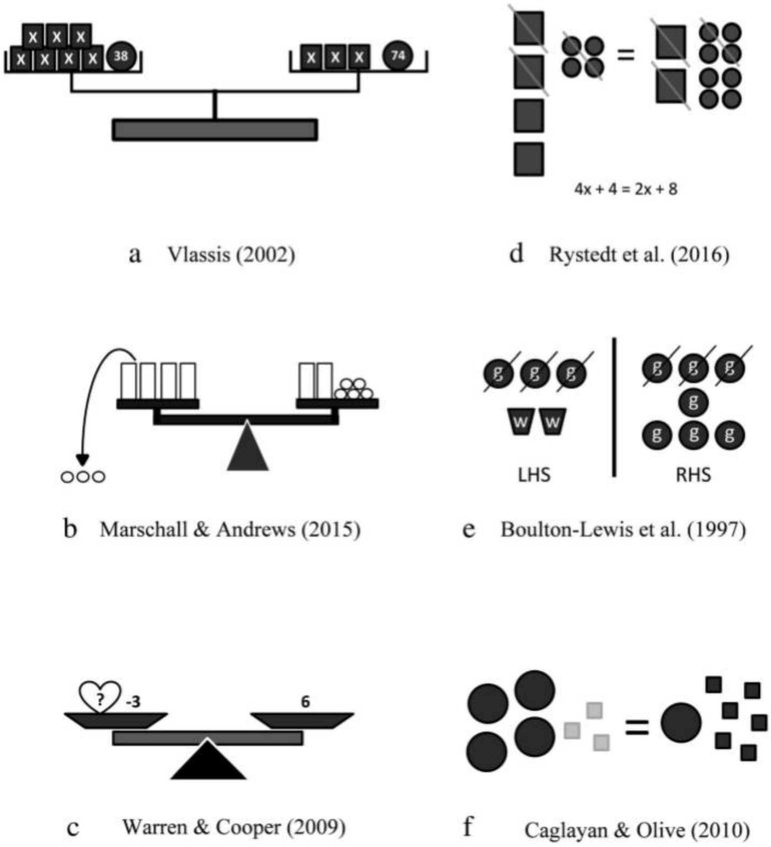


Figura 3: modelo da balança desenhados, exemplos de seis artigos (Otten et al., 2019, p.13)

Com a utilização deste tipo de modelos, pretende-se ajudar os alunos a entender que numa equação, as expressões em ambos os lados do sinal de igual têm o mesmo valor e que esta igualdade deve ser mantida no processo de resolução da mesma (Otten et al., 2019). Neste sentido, o modelo é usado para aprimorar o conhecimento dos alunos sobre o conceito de igualdade nas equações, fazendo-se a analogia com o equilíbrio da balança de pratos. O uso deste modelo permite compreender o conceito de equação com a ideia de equilíbrio, e a eliminação do mesmo termo em ambos os membros através da adição, subtração, multiplicação ou divisão da mesma quantidade (Ponte, Branco & Matos, 2009), sendo intuitivo para demonstrar a estratégia de "fazer a mesma coisa" em ambos os lados da equação, de modo a que a igualdade se mantenha, ajudando os alunos também a perceber as operações que devem aplicar.

Outra vantagem do modelo é a possibilidade de acompanhar todas as relações numéricas que estão expressas na equação enquanto esta está a ser sujeita a alterações, o que torna o modelo adequado para demonstrar o cancelamento de termos semelhantes em ambos os membros da equação (Filloy & Rojano, 1989). No entanto, o modelo apresenta algumas limitações que devem ser tidas em conta, tais como, não ser possível representar equações com quantidades negativas ou subtrações (Filloy & Rojano, 1989), e dificuldade de alguns alunos em conectar automaticamente as suas ações da experiência física com a manipulação de símbolos abstratos (Otten et al., 2019).

Em vários artigos é descrito que o modelo da balança foi bastante benéfico para a aprendizagem da resolução de equações algébricas, revelando ser uma prática facilitadora na transição para um pensamento mais abstrato, onde vão surgindo naturalmente a aplicação dos princípios de equivalência e os procedimentos usuais da resolução de equações (Branco, 2008; Nobre, 2018; Otten et al., 2019).

No processo de aprendizagem é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais, sendo importante para tal estes modelos informais como o da balança. No entanto, é igualmente necessário que os alunos aprendam as formas estabelecidas de representação que servem de base à atividade matemática e à comunicação das ideias matemáticas. O recurso a diferentes situações de complexidade crescente, envolvendo balanças, pode ser um bom veículo para estimular o uso de representações informais conduzindo à aprendizagem formal da resolução de equações (Nobre, 2018).

2.3 A justificação matemática

2.3.1 A justificação matemática como processo do raciocínio matemático

Como referi anteriormente, na minha intervenção atendi ao objetivo do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A par com este esteve também a promoção do raciocínio matemático na minha experiência de lecionação do tópico de Equações do 1.º grau. Estas duas temáticas intersetam-se em alguns aspetos, uma vez que ao trabalhar a Álgebra no sentido da promoção do pensamento algébrico também estarei a promover o raciocínio matemático, incentivando à generalização, justificação, etc.

Vários modelos têm sido apresentados para evidenciar o que envolve o raciocínio matemático. Um modelo apresentado por Lannin, Ellis e Elliot (2011) identifica conjeturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos como os processos de raciocínio matemático. Segundo diversos autores, raciocínio matemático é fazer inferências justificadas, ou seja, usando informações matemáticas conhecidas para obter novas informações. Isso pode ser feito de forma indutiva, dedutiva ou abdutiva (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020).

Raciocinar dedutivamente envolve encadear afirmações de forma lógica e justificar esse encadeamento (Ponte, Branco & Matos, 2008). Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) o raciocínio indutivo é a inferência de uma regra a partir da observação da ocorrência da mesma em alguns casos particulares. Por fim, a abdução envolve um caso invulgar, procurando-se uma explicação para o mesmo.

É importante, em sala de aula, proporcionar momentos para o desenvolvimento do raciocínio matemático nas várias formas apresentadas. Tendo por base os processos de raciocínio matemático abordados nos modelos já referidos, podemos destacar três: conjeturar, central no raciocínio abdutivo; generalizar, associado ao raciocínio abdutivo e indutivo; e, justificar, essencial no raciocínio dedutivo (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). Assim, se os alunos tiverem a oportunidade de conjeturar, generalizar e justificar em sala de aula será proporcionado aos mesmos um pleno desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) elaboraram uma tabela com os elementos em que estes três processos se podem basear e as formas que podem assumir e que apresento de seguida (Tabela 4).

Tabela 4: Elementos em que conjeturar, generalizar e justificar se podem basear e as formas que podem assumir (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020, p. 10)

Conjeturar	*Podem ter por base* - observação; - construção; - transformação do conhecimento prévio; - combinações de observação, construção e transformação.	*Pode assumir formas como* - identificar uma possível solução para um problema; - formular uma estratégia para resolver um problema;
Generalizar		*Pode assumir formas como* - reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos; - alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais alargado de objetos.
Justificar	*Pode ter por base* - definições; - axiomas, propriedades, princípios gerais; - representações; - combinações de definições, propriedades e representações.	*Pode assumir formas como* - coerência lógica; - uso de exemplos genéricos; - uso contraexemplos; - por exaustão; - por absurdo.

Widjaja et al. (2020), por sua vez, consideram três níveis de generalização: 1. formação de conjeturas sobre propriedades comuns; 2. estender uma propriedade comum por meio de exemplos adicionais; 3. generalizar propriedades. Estes níveis apresentados por estes autores vão ao encontro das formas que a generalização pode assumir segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) (Tabela 4).

O foco no raciocínio dos alunos e na possibilidade de estes construírem conexões para formar generalizações apenas é possível se o professor organizar a aula de modo a incluir a partilha e discussão das ideias dos alunos. Se forem dadas oportunidades aos alunos para se envolverem num processo de raciocínio de comparação e contraste irá permitir que estes formem conjeturas, o que apoiará o seu desenvolvimento de generalizações e justificações matemáticas (Widjaja et al., 2020). Para tal acontecer, as tarefas devem ser criteriosamente escolhidas para: i) motivar os alunos para a atividade, desafiando-os; ii) potenciar elementos revelantes do pensamento algébrico; e iii) estabelecer conexões com conteúdos anteriores (Oliveira & Mestre, 2014).

Debrucemo-nos agora na justificação matemática, o processo do raciocínio matemático que é alvo do meu estudo. Quando os alunos se envolvem explicitamente em apresentar justificações, desenvolvem uma compreensão mais ampla dos aspetos matemáticos da situação. Além disso, promover as justificações estimula os alunos a reanalisar os processos das suas resoluções e a oferecer justificações mais adequadas. Este processo do raciocínio matemático leva os alunos a fazer conexões entre conceitos, representações e procedimentos matemáticos, apresentar argumentos, resolver problemas e desenvolver novas ideias matemáticas (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Existem vários níveis de justificações matemáticas que são progressivamente mais formais à medida que os alunos progridem no nível de escolaridade e no seu conhecimento. Mata-Pereira e Ponte (2018) citam diversos autores que os sustentaram na elaboração de um modelo que caracteriza as justificações dos alunos que mais emergem nas salas de aula, tendo em conta o nível de complexidade e de formalidade com que são apresentadas. A sistematização desse modelo é apresentada na Tabela 5.

Tabela 5: Níveis de formalidade e complexidade das justificações (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p.490)

<table>
<tr><td colspan="3">Aumento do nível de formalidade</td><td>0</td><td colspan="3">Sem justificação</td><td rowspan="6">Aumento do nível de complexidade</td></tr>
<tr><td rowspan="5">A
Não apresenta formalidade</td><td rowspan="5">B
Formal mas incompleto</td><td rowspan="5">C
Formal</td><td>1</td><td colspan="3">Justificação baseada em fontes externas</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Evidência empírica</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td>3A</td><td>3B</td><td>3C</td></tr>
<tr><td>Coerência lógica</td><td>Exemplo genérico</td><td>Justificação de procedimentos ou propriedades</td></tr>
<tr><td colspan="3">Justificação dedutiva</td></tr>
</table>

Assim, de acordo com os autores, o nível de complexidade 0 corresponde às resoluções dos alunos onde não surge qualquer justificação.

O nível 1 de complexidade corresponde a uma justificação baseada noutra pessoa ou em materiais de referência. Nesse caso, o aluno depende do manual escolar, das afirmações do professor ou até de um colega que considere mais apto na disciplina. Este tipo de justificações ocorre quando os alunos consideram apenas a estrutura do argumento e não atendem ao seu conteúdo. A justificação baseada nos procedimentos simbólicos permite aos alunos considerar os símbolos matemáticos como sendo independentes de qualquer significado ou relação com uma situação específica. Nesta justificação, os alunos podem escrever na resolução de uma equação, por exemplo, $2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 - 3 = 2 : 2 = 1$ (Mata-Pereira & Ponte, 2018), ou seja, colocando o símbolo da igualdade quando a mesma não se verifica não atendendo ao seu significado.

As justificações de nível 2 de complexidade baseiam-se em evidências empíricas, podendo ser usados exemplos ou exemplos cruciais. Balacheff (1988) considera que os exemplos cruciais atendem à hipótese estabelecida. A estratégia de escolher exemplos cruciais visa obter um resultado claramente distinto que leva a excluir todas as hipóteses exceto uma. Nestas justificações, uma experiência crucial permite validar uma generalização que é determinada pelas características ou pelos factos conhecidos da situação. Estas justificações são baseadas numa perceção da situação, normalmente em diagramas ou desenhos. As justificações baseadas em exemplos, ou seja, casos particulares da situação são, habitualmente, um obstáculo à generalização. Com estas justificações, os alunos normalmente validam generalizações matemáticas com base em uma única experiência ou declarando uma generalização justificando que resulta para todos os casos que testaram (Balacheff, 1988).

Em relação às justificações de nível 3, estas consideram um exemplo não como um caso particular, mas como um representante de uma classe de objetos. Justificações deste tipo são, muitas vezes, parte de uma demonstração e podem ser subdivididas em três níveis nomeados acima como nível 3A, 3B e 3C. Apresentar justificações de nível 3 pode ser um sinal de que o aluno reconhece argumentos empíricos como um método inseguro para validar afirmações matemáticas (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

As justificações com nível de complexidade 3A correspondem a justificações baseadas em coerência lógica, também denominadas por justificação analítica de natureza axiomática, considerando que o conhecimento matemático pode ser organizado de maneira que novos resultados sejam consequências lógicas de resultados anteriores (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

No nível de complexidade 3B encontram-se as justificações relacionadas com um caso particular que recorrem a exemplos genéricos, ou seja, que se considera como representativo de uma classe de objetos, focando-se em aspetos gerais de uma situação particular e pode envolver, em simultâneo, outros processos do raciocínio como a generalização (Balacheff, 1988).

Por fim, no nível de complexidade 3C temos as justificações independentes de casos particulares, que correspondem a justificações de procedimentos ou propriedades, tendo como objetivo explicar porque uma afirmação é válida, baseando-se em propriedades matemáticas, definições, hipóteses e teoremas (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

A formalidade da justificação é subjetiva, visto que depende do nível de escolaridade em que os alunos estão inseridos. No entanto, no esquema (Tabela 5) são sintetizados três níveis de formalidade que são os seguintes: justificação com nível de formalidade A quando não apresenta formalidade; nível de formalidade B quando é apresentada uma justificação formal, ainda que incompleta ou com inferências baseadas apenas em casos particulares ou no que é considerado conhecimento geral, havendo recurso a representações mais informais; e nível de formalidade C quando a justificação é formal e baseada numa sequência de inferências relacionadas, havendo recurso a representações formais.

Widjaja et al. (2020) realizaram um estudo de modo a rever os níveis de justificação dos alunos apresentados por diversos autores. Os autores recorreram a uma tarefa matemática, apresentada a 80 alunos entre os 7 e os 10 anos de idade, para verificar que níveis de justificação (sugeridos por vários autores) surgiam. Esses níveis são apresentados na Tabela 6, acompanhados da percentagem de alunos que recorreu a cada tipo de justificação. É de salientar que distingue o nível 2 do nível 3 é que neste último os alunos precisam ser capazes de elaborar e justificar o seu argumento.

Tabela 6: Níveis de justificação apresentados pelos alunos no estudo de Widjaja et al. (2020)

Níveis de justificação (vários autores)	Alunos que recorreram a cada nível de justificação (%)
0. Sem justificação.	30
1. Apelar à autoridade ou a outros.	0
2. Explicar uma propriedade comum usando um exemplo ou contraexemplo.	43
3. Verificar se a propriedade comum é válida para cada membro do grupo.	20
4. Estender a generalização usando argumentos lógicos.	7

Na Tabela 6 podemos verificar que nenhum aluno recorreu a uma justificação que apele à autoridade ou a outros. A maioria dos alunos apresentou uma justificação recorrendo a exemplos ou procurando contraexemplos. Segundo Widjaja et al. (2020), esta conclusão coincide com estudos anteriores que revelaram que os alunos do ensino básico confiavam em exemplos para justificar a verdade das afirmações. Os mesmos autores indicam que os dados mostram que os alunos desenvolveram argumentos lógicos no nível 4 de justificação. A revisão dos níveis foi elaborada por Widjaja et al. (2020) e resultou na Tabela 7.

Tabela 7: Revisão dos níveis de justificação (Widjaja et al., 2020, p. 21)

Níveis de justificação (vários autores)	**Níveis de justificação revistos por Widjaja, Vale, Herbert, Loong e Bragg (2020)**
0. Sem justificação. 1. Apelar à autoridade ou a outros. 2. Explicar uma propriedade comum usando um exemplo ou contraexemplo. 3. Verificar se a propriedade comum é válida para cada membro do grupo. 4. Extensão da generalização usando argumentos lógicos.	0. Sem justificação (incluindo apelar à autoridade ou a outros) 1. Usar exemplos e procurar contraexemplos para explicar ou verificar a conjetura ou generalização. 2. Usar contraexemplos para refutar a conjetura. 3. Usar um argumento para confirmar ou refutar a conjetura. 4. Usar um argumento generalizável.

Como a justificação de nível 1 não ocorreu em qualquer aluno, esta foi combinada com o nível 0 podendo ser considerada como não justificação. O novo nível 1 criado serve para descrever os alunos que usam mais exemplos para mostrar que uma propriedade ou regra comum é válida ao explorar padrões ou relacionamentos.

No nível 2 foram colocadas as justificações baseadas em contraexemplos para a refutação de conjeturas. Embora esta estratégia não seja adequada quando a conjetura é válida, esta abordagem mostra uma compreensão mais avançada da justificação e é necessário desenvolver nos alunos estratégias para refutar conjeturas (Widjaja et al., 2020).

Os autores notaram que ao verificar uma propriedade comum, os alunos expressavam incerteza enquanto tentavam desenvolver um argumento para confirmar ou refutar uma conjetura. Esta dificuldade é aceitável pelo que decidiram colocar um nível de transição entre o 2 e o 4. Assim, o nível 3 inclui as justificações que recorrem a um argumento para confirmar ou refutar uma conjetura.

Por fim, o nível 4 foi também alterado porque a extensão da generalização não foi verificada no estudo, revelando-se desnecessário para testar algumas conjeturas. O que se verificou como nível mais alto de justificação foi um argumento generalizável.

2.3.2 Promoção da justificação matemática

O apoio na fase de trabalho autónomo é crucial na promoção da justificação matemática, recorrendo ao questionamento de modo a fazer com que os alunos reflitam nos procedimentos efetuados e, consequentemente, os justifiquem da melhor forma que considerem e conseguirem, visto que, muitas das vezes é necessário um incentivo extra à justificação, na medida em que não o fazem espontaneamente.

Um outro momento importante para promover o desenvolvimento das justificações matemáticas dos alunos são as discussões coletivas, onde o professor deve incentivar os alunos a descrever ou explicar o seu raciocínio matemático, levando-os a perceber a Matemática envolvida (Mata-Pereira & Ponte, 2018). Além disso, este momento da aula permite a apropriação por parte dos alunos do tipo de argumentação que é requerido numa justificação matemática (Gregório & Oliveira, 2018). Widjaja et al. (2020), no estudo que elaboram verificaram que as justificações surgiam mais quando os alunos eram convidados a comunicar o seu raciocínio oralmente ou para toda a turma.

Na fase de trabalho autónomo, devem ser selecionados os alunos que apresentam justificações coerentes e pertinentes, bem como outros, cuja justificação poderá não ser tão adequada mas que a sua partilha permite uma chamada de atenção à turma. Após a seleção dos alunos a apresentar, o professor deve incentivar à partilha das suas resoluções e respetivas argumentações na fase da discussão coletiva. Além disso, a fase da discussão coletiva é essencial também para desenvolver a comunicação matemática, que o documento das Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 7.º ano (DGE, 2018) salienta que tem um papel muito importante na aprendizagem da Matemática, na medida em que, ajuda na organização, clareza e na consolidação dos seus conhecimentos (Oliveira & Mestre, 2014).

Para a promoção da justificação matemática é necessário atender a algumas práticas de modo a incentivar à mesma nos vários momentos da aula e tanto nas aulas lecionadas presencialmente como nas aulas à distância. Nesse sentido, aquando da lecionação das aulas, é importante atender a várias ações do professor que têm o propósito de promover o raciocínio matemático e, consequentemente a justificação matemática, nomeadamente: (a) questionar, encorajando a partilha de ideias; (b) identificar justificações válidas e inválidas, indicando o porquê; e (c) valorizar contribuições parciais e desafiar a ir mais além (Mata-Pereira & Ponte, 2016; Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Debruçar-nos-emos em cada uma das ações mencionadas anteriormente. A primeira, questionar, encorajando a partilha de ideias é uma ação bastante importante na promoção da justificação matemática. Muitas vezes os alunos aceitam as conjeturas e generalizações como válidas sem sentirem a necessidade de justificar (Harel & Sowder, 2007), nesse sentido é essencial o papel do professor incentivando às mesmas através do questionamento. Aquando da realização da tarefa, o questionamento permite ao aluno refletir nas conclusões a que chegou sabendo argumentar os procedimentos utilizados e o resultado obtido. É igualmente essencial esta ação na fase de partilha de ideias com a turma, de modo a haver uma exposição de diversas resoluções acompanhadas de uma justificação da estratégia utilizada e discussão das mesmas, aprofundando os conhecimentos ou conduzindo a novos resultados.

É também importante que os alunos reconheçam justificações válidas e inválidas. As justificações baseadas em exemplos concretos podem ter um papel importante do ponto de vista do raciocínio, dependendo do nível de escolaridade em que os alunos estão inseridos ou quando estes ainda não têm ferramentas para poder formular raciocínios do tipo dedutivo (Lannin et al., 2011). É, no entanto, importante que os professores façam ver aos alunos as limitações das suas justificações identificando as que são válidas e as que não o são explicando o porquê, na medida em que justificações baseadas em exemplos podem levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, algo que já não acontece com a utilização de um raciocínio dedutivo (MEC, 2013; Widjaja et al., 2020).

Valorizar contribuições parciais e desafiar a ir mais além são ações essenciais, na medida em que se o aluno apresenta uma justificação que não está completa, não devemos apenas evidenciar que não serve, devemos valorizar, mas apontar aspetos cujo argumento não se adequa ou não é válido, fazendo com que o aluno reflita sobre esse aspeto e reformule.

Desafiar a ir mais além nas justificações permite aos alunos aprofundar o seu conhecimento, perceber o porquê de algo ser verdade, tendo uma plena compreensão dos conteúdos. Como tal, é essencial o papel do professor, colocando questões como "E se…?".

Em suma, de modo a garantir o cumprimento do objetivo proposto, deve-se atender às ações do professor mencionadas, para além de uma adequada seleção de tarefas a propor que incentivem à justificação matemática dos alunos, quer no seu trabalho autónomo como, oralmente, nas discussões coletivas.

Capítulo 3 Unidade Didática

3.1 Contexto escolar e participantes do estudo

3.1.1 Caracterização da escola

A intervenção letiva decorreu no Colégio Militar, situado em Carnide. Trata-se de uma instituição escolar peculiar, por assegurar também uma formação de matriz militar de base e possuir um sistema de ensino misto, num regime de frequência optativo entre externato e internato. Segundo o Projeto Educativo do Colégio (Colégio Militar, 2019), a sua principal finalidade, na vertente escolar, é promover o acesso dos alunos ao ensino superior.

De acordo com os dados fornecidos pelo sítio oficial do Colégio Militar (https://www.colegiomilitar.pt/) este estabelecimento acolhe 725 alunos. Relativamente ao corpo docente do estabelecimento de ensino, o Projeto Educativo de 2016 (Colégio Militar, 2016) indica que cerca de 75% dos professores pertencem ao Mapa do Pessoal Civil do Exército.

O Colégio Militar tem, nas suas instalações, diversos recursos para atividades extracurriculares, nomeadamente, um auditório com cerca de 350 lugares, um salão nobre, um centro de recursos/sala de leitura, um arquivo histórico, um museu de história natural, um museu do Colégio Militar e diversas instalações desportivas como ginásio, piscina, campos para prática de várias modalidades coletivas, picadeiros, etc.

A sala de aula da turma alvo da minha prática de ensino supervisionada é utilizada para todas as disciplinas, exceto Físico-Química, Ciências e Educação Física, sendo que mais nenhuma turma tem aulas naquele espaço. Por este motivo os alunos podem deixar o seu material na sala de aula durante toda a semana, só o levando para casa quando necessário. Os alunos estão sentados em carteiras individuais, o que cria algumas limitações quanto aos modos de trabalho em sala de aula. A sala está equipada com projetor de dados e quadro de giz.

3.1.2 Caracterização da Turma

A turma do 7.º ano de escolaridade que foi alvo da intervenção letiva é composta por 17 alunos, dos quais 10 rapazes e 7 raparigas, existindo 6 alunos em regime externo e 11 em regime de internato. Não existem alunos com necessidades educativas especiais. Apenas uma aluna está a repetir o 7.º ano, mas pelo facto de ser originária de um país que tem um currículo distinto do português e iniciou os estudos em Portugal no ano de 2019.

A turma, no trabalho em sala de aula, revela grandes disparidades ao nível da apropriação dos conhecimentos matemáticos, havendo alunos com grandes capacidades e outros com bastantes dificuldades. Este facto influencia muito a planificação das aulas e a seleção das tarefas a propor, para ser possível ter aulas que envolvam os alunos e que promovam a aprendizagem da generalidade da turma.

É uma turma um pouco agitada, mas também participativa nas atividades, sendo necessária muitas vezes chamar à atenção dos alunos para se focarem no trabalho a realizar. No entanto, devido às características mencionadas, a turma permite ter discussões coletivas muito interessantes e onde os protagonistas variam razoavelmente. Também nas aulas lecionadas à distância foi visível a boa participação da turma em geral, na medida em que a grande maioria dos alunos intervinham, em quase todas as aulas, voluntariamente ou quando eram solicitados para tal.

Verificou-se serem poucas as aulas expositivas realizadas pela professora cooperante, estando os alunos habituados a ter um papel central em sala de aula e que promove muito a sua participação. A turma revelou algum hábito de trabalho a pares que tinha sido implementado pela professora cooperante desde o início do ano letivo, funcionando razoavelmente bem nesse modo, salvo algumas exceções de alunos que tendiam a realizar as tarefas de modo individual. Em alguns pares, era evidente que os contributos para o trabalho eram desequilibrados, recaindo normalmente sobre o aluno com mais facilidade na disciplina. Nas aulas presenciais, o modo de trabalho a pares foi o selecionado para esta unidade e seria mantido caso não tivesse ocorrido a mudança para o ensino à distância, decorrente do confinamento.

Debrucemo-nos sobre o desempenho académico da turma. No Colégio Militar o ano letivo está organizado em dois semestres. As classificações de final de semestre são apresentadas aos alunos e Encarregados de Educação numa escala de zero a 200 pontos, sendo a tabela de equivalência aos níveis de avaliação habituais do 3.º ciclo do Ensino Básico (Tabela 8), ou seja, entre um e cinco, a seguinte:

Tabela 8: Tabela de equivalência aos níveis de avaliação de um a cinco

1	**0 – 49**
2	**50 – 99**
3	**100 – 139**
4	**140 – 179**
5	**180 - 200**

Apresento a seguir um gráfico (Figura 4) onde se compara a classificação de cada aluno na disciplina de Matemática no 1.º e 2.º semestres.

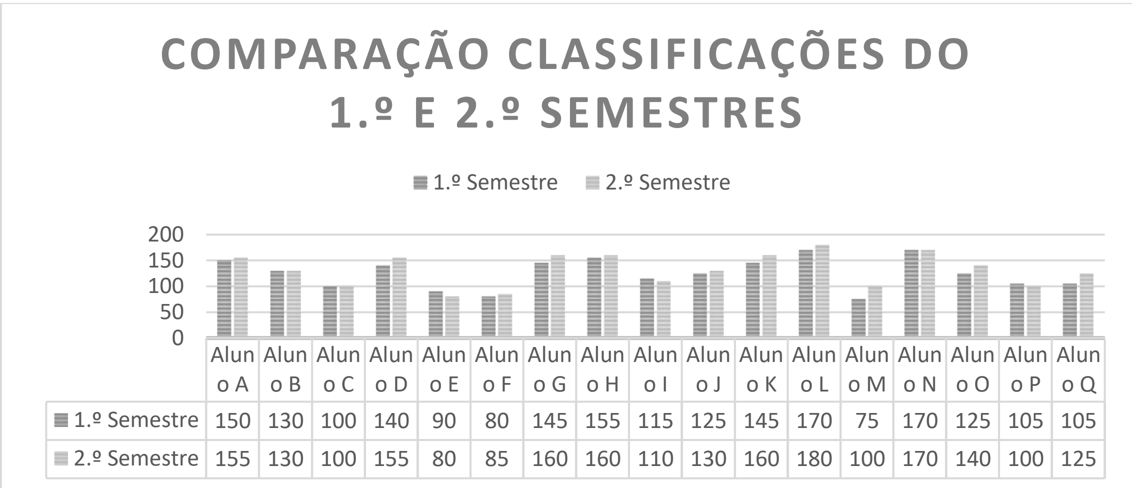


Figura 4: Comparação de classificações de cada aluno no 1.º e 2.º semestres.

No final do 1.º semestre, 14 alunos da turma tiveram um desempenho positivo na disciplina de Matemática e três alunos apresentaram uma classificação negativa, todas estas no nível dois, compreendidas entre 75 e 90. Dos alunos com desempenho positivo, sete estão no nível 3 e sete estão no nível quatro, não havendo alunos com nível cinco de classificação. A média da turma a Matemática foi de 123.

A média a todas as disciplinas nesta turma foi de 145.2, tendo sido atribuída, no Conselho de Turma, uma avaliação qualitativa de Bom quanto ao comportamento e aproveitamento. Cinco alunos da turma mereceram menção de quadro de honra e seis alunos apresentaram pelo menos uma negativa no final do semestre.

Relativamente ao 2.º semestre, 15 alunos tiveram uma classificação final igual ou superior a 100 valores, sendo que dois alunos não conseguiram atingir a positiva na disciplina, apresentando um nível 2 de classificação. Dos alunos que apresentaram uma classificação positiva, seis estão no nível 3, oito no nível 4 e ainda um aluno no nível 5 de classificação. A média da turma à disciplina no 2.º semestre foi de 131,76 que corresponde a um aumento significativo relativamente ao 1.º semestre. A média geral da turma a todas as disciplinas foi 152.7, tendo sido atribuído, no Conselho de Turma, uma avaliação qualitativa de Bom relativamente ao comportamento e aproveitamento.

É de facto notória, a melhoria geral da turma do 1.º para o 2.º semestre, o que é de assinalar, visto que o 2.º semestre foi lecionado, grande parte do tempo, à distância. Além disso, este facto é verificado não só na disciplina de Matemática, mas também nas restantes, pela melhoria observada também da média geral da turma.

3.2 Ancoragem da unidade didática no programa da disciplina

A Unidade Didática lecionada no âmbito da prática de ensino supervisionada no 7.º ano de escolaridade foi organizada em dois grandes temas: Expressões Algébricas e Equações do 1.º grau.

O Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) faz o encadeamento dos temas a serem lecionados da seguinte forma, Funções, Sequências e Sucessões e, por fim, Equações algébricas. Os tópicos a abordar no tema das Equações (MEC, 2013) são os seguintes:

- Equação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto solução;
- Equações possíveis e impossíveis;
- Equações equivalentes;
- Equações numéricas; princípios de equivalência;
- Equação linear com uma incógnita; simplificação e caracterização do conjunto-solução; equações lineares impossíveis, possíveis, determinadas e indeterminadas; equação algébrica de 1.º grau;
- Soluções exatas e aproximadas de equações algébricas de 1.º grau;
- Problemas envolvendo equações lineares.

Já o encadeamento dos tópicos a abordar no tema das Equações do 1.º grau sugerido pelo documento das Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) é o seguinte: começa com Sequências e Sucessões, posteriormente Equações algébricas e, por fim, Funções. Este encadeamento difere do sugerido pelo Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013).

O documento das Aprendizagens Essenciais de Matemática do 7.º ano de escolaridade (DGE, 2018) considera como objetivos essenciais de aprendizagem "Reconhecer, interpretar e resolver equações do 1.º grau a uma incógnita (sem denominadores) e usá-las para representar situações em contextos matemáticos e não matemáticos" (p. 11). Como práticas essenciais de aprendizagem o documento das Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) enumera as seguintes, a discussão das soluções obtidas, havendo o foco nos contextos não puramente matemáticos bem como o entendimento, por parte dos alunos, dos resultados obtidos.

Na planificação da Unidade Didática tive em conta, como principal documento orientador, as Aprendizagens Essenciais de Matemática do 7.º ano de escolaridade (DGE, 2018) devido aos objetivos essenciais de aprendizagem mencionados, às práticas essenciais de aprendizagem e ao encadeamento dos tópicos a abordar no tema das Equações do 1.º grau.

Considero que os objetivos de aprendizagem presentes no documento das Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) são bastante adequados pelo que, procurei atender aos mesmos através da resolução de problemas em contextos variados que, muitas vezes, implicavam uma interpretação do resultado obtido no contexto do problema e, por sua vez, o entendimento do mesmo. No entanto, um dos objetivos difere num aspeto dos que estabeleci, dado que no documento mencionado anteriormente apenas são tidas em conta as equações do 1.º grau a uma incógnita sem denominadores, no entanto, na minha prática letiva foi também abordada a resolução de equações com denominadores. Esta decisão decorre do facto de no Programa e Metas curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) não se indicar tal exclusão, pelo que, o manual adotado pelo Colégio Militar para a Matemática de 7.º ano (Passos & Correia, 2019) inclui esse tipo de equações, estando presentes em muitas das tarefas ali propostas. Dado que em anos mais avançados os alunos poderão aprofundar o seu estudo, considerei que seria vantajoso o conhecimento das mesmas já neste ano, sendo também uma oportunidade de recordar as operações com frações e estendê-las às expressões algébricas.

Como referi, a planificação anual para a disciplina de Matemática no 7.º ano de escolaridade do Colégio Militar segue o encadeamento sugerido pelas Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018). Considero que este é o mais adequado, na medida em que, ao trabalhar com Sucessões e Equações anteriormente ao tema das Funções, os alunos já estarão familiarizados com a linguagem algébrica e, em particular, permite-lhes desenvolver o conhecimento necessário para realizarem alguns cálculos algébricos que são necessários no tópico das Funções.

O facto de, como referi, na planificação anual da disciplina de Matemática do 7.º ano de escolaridade do Colégio Militar, as Sequências e Sucessões estarem inseridas imediatamente antes do tópico das Expressões algébricas e Equações é um aspeto bastante importante. O estudo de regularidades é um importante tópico para promover o raciocínio matemático (Ponte, Branco & Matos, 2009), aprofundando o estudo de relações algébricas e a sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica (Saraiva, Pereira & Berrincha, 2010). Neste sentido, utilizei o facto de a professora cooperante já ter desenvolvido o tema das Sequências e Sucessões e recorri ao conhecimento que os alunos tinham sobre o mesmo fazendo uma ponte para o tópico de Equações, na medida em que é essencial a apropriação eficaz dos conceitos algébricos antes de passar para a resolução de equações, possibilitando a entrada neste novo grande tema de forma mais ligeira, diminuindo a barreira de dificuldades do ponto de vista algébrico.

Segundo Ponte et al. (2007), é importante proporcionar aos alunos experiências algébricas informais antes da manipulação algébrica formal para uma melhor apropriação de conceitos, métodos e procedimentos algébricos.

Também o trabalho com expressões algébricas é essencial para os alunos terem bem presente como as mesmas se simplificam, bem como se manipulam termos com e sem letra. Na resolução de equações é muito utilizada a simplificação de expressões algébricas logo, caso este conteúdo não esteja bem apropriado, não permite o avanço para uma eficaz resolução de equações, levando a erros na redução de termos semelhantes e, portanto, comprometendo o sucesso dos alunos. Neste sentido, considerei indispensável abordar o tema das Expressões Algébricas, anteriormente à lecionação do tema das Equações algébricas, pelo que o mesmo foi incluído na minha intervenção letiva.

A definição de equação sugerida pelo Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) apresenta as equações como igualdade de funções, no entanto, decorrendo da opção referida anteriormente, a definição apresentada aos alunos foi a de equações como igualdade de expressões algébricas onde alguns valores são desconhecidos.

A planificação anual para a disciplina de Matemática no 7.º ano de escolaridade do Colégio Militar contempla 18 tempos de 50 minutos para a lecionação de Equações Algébricas que inclui também as Expressões Algébricas, e mais três tempos de igualmente 50 minutos para avaliação sumativa. A planificação anual inicialmente elaborada sofreu algumas alterações devido à adaptação das aulas presenciais para aulas à distância, visto que, os alunos tinham habitualmente, 5 tempos semanais de 50 minutos e passaram a ter duas aulas síncronas à distância semanais de 45 minutos cada e, no intervalo destas, aulas assíncronas onde eram partilhados materiais com os alunos para, posteriormente, serem discutidos na aula síncrona. Com a adaptação da planificação que foi necessária ser feita, o número de aulas lecionadas foi distinto do previsto, bem como os tempos destinados à avaliação sumativa.

A intervenção letiva sofreu uma grande alteração devido à pandemia que se instalou. Assim, as duas primeiras aulas foram lecionadas presencialmente, em março, e as restantes oito foram lecionadas à distância, já depois das férias da Páscoa, havendo um grande intervalo entre a segunda e a terceira aulas da intervenção. No impasse de não saber se as aulas presenciais iriam ou não ser retomadas e na indecisão de iniciar ou não o ensino à distância, houve a necessidade de começar o capítulo das Medidas de Localização, daí o intervalo entre a segunda e a terceira aulas da intervenção ser tão alargado. Este capítulo foi também lecionado à distância, mas pela professora cooperante.

Cada aula à distância foi composta por dois momentos, o primeiro assíncrono, onde os alunos tinham acesso aos conteúdos e às tarefas e procediam à sua resolução. E o segundo síncrono, onde as tarefas eram discutidas e onde eram esclarecidas as dúvidas dos alunos.

Nas aulas assíncronas disponibilizei materiais didáticos aos alunos, como vídeos explicativos com os conteúdos de aprendizagem e fichas de trabalho compostas por várias tarefas de natureza distinta. As tarefas eram posteriormente discutidas na aula síncrona seguinte. As aulas síncronas tinham a duração de 45 minutos cada e ocorriam duas vezes por semana com recurso à plataforma Microsoft Teams. Uma das aulas síncronas foi dedicada a um teste de avaliação escrito, teste este disponibilizado aos alunos a partir da plataforma Microsoft Forms.

A minha planificação da Unidade Didática é apresentada na Tabela 9 onde refiro a data em que foi realizada cada aula. Nas aulas presencias refiro o número de tempos das mesmas, sendo cada tempo de 50 minutos. Nas aulas lecionadas à distância refiro o intervalo de tempo que os alunos tiveram para realizar as tarefas propostas na aula assíncrona e posteriormente, em que data se realizou a aula síncrona. Apresento ainda os objetivos de aprendizagem contemplados em cada uma das aulas da intervenção.

Tabela 9: Planificação da Unidade Didática

	Aula	Data	Tempos	Objetivos de aprendizagem
Ensino Presencial	1	2 março	2	- Conhecer a noção de expressões algébricas e saber como operar com expressões algébricas simples.
	2	4 março	1	- Saber simplificar expressões algébricas.
Ensino à distância	3	17 abril a 19 abril	Assíncrona	- Consolidar a terminologia associada às expressões algébricas e a simplificação de expressões algébricas. - Compreender o que são e para que servem equações, bem como a terminologia associada.
		21 abril	Síncrona	
	4	21 abril a 22 abril	Assíncrona	- Resolver equações do tipo "x + a = b", utilizando o princípio de equivalência da adição e a regra prática.
		24 abril	Síncrona	
	5	24 abril a 26 abril	Assíncrona	- Resolver equações do tipo "$ax = b$" e "$ax + b = c$", utilizando os princípios de equivalência e as regras práticas. - Resolver problemas.
		28 abril	Síncrona	
	6	28 abril a 2 maio	Assíncrona	- Resolver equações do tipo "$ax + b = cx + d$", utilizando os princípios de equivalência e as regras práticas. - Resolver problemas.
		5 maio	Síncrona	
	7	8 maio	Síncrona	- Avaliação de aprendizagens (teste escrito).
	8	5 maio a 9 maio	Assíncrona	- Resolver equações com parêntesis. - Resolver problemas.
		12 maio	Síncrona	
	9	12 maio a 13 maio	Assíncrona	- Classificar Equações lineares. - Resolver problemas.

		15 maio	Síncrona	
	10	15 maio a 17 maio	Assíncrona	- Resolver equações com denominadores. - Resolver problemas.
		19 maio	Síncrona	
		22 maio	Síncrona	
	11	19 maio a 23 maio	Assíncrona	- Consolidar a resolução de equações. - Resolver problemas.
		26 maio	Síncrona	

3.3 Conceitos matemáticos envolvidos

Nesta secção são indicados os conceitos matemáticos envolvidos na Unidade Didática lecionada. Começo pela definição de equação com uma incógnita passando, de seguida, à nomenclatura associada às equações de modo a facilitar a comunicação, visto que, é essencial à compreensão dos restantes conceitos.

Equação com uma incógnita é uma igualdade de expressões algébricas, que inclui uma letra que representa um valor desconhecido designado "incógnita".

Nas equações chamamos **incógnita** à letra. Esta não pode ser substituída por qualquer valor, apenas pelos que tornam a igualdade numérica verdadeira.

Alguma nomenclatura associada às equações é apresentada de seguida:

1.º membro: lado esquerdo da igualdade ($ax + b$ (ver **Figura 5**)).
2.º membro: lado direito da igualdade ($cx + d$ (ver **Figura 5**)).
Os membros da equação são constituídos por **termos** ($ax; b; cx; d$ (ver **Figura 5**)).
Termo dependente: termo com letra, varia conforme o valor da incógnita ($ax; cx$ (ver **Figura 5**)).
Termos independentes ou constantes: têm sempre o mesmo valor independentemente do valor da incógnita ($b; d$ (ver **Figura 5**)).

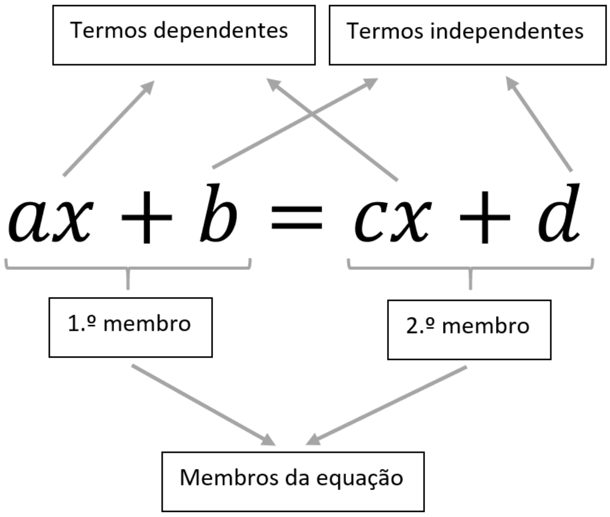


Figura 5: Nomenclatura das equações.

Ao resolvermos uma equação, o objetivo é encontrar os valores da incógnita que tornam a igualdade numérica verdadeira. A esses valores dá-se o nome de **solução da equação**.

A equações, com a mesma incógnita, cujo conjunto solução é o mesmo chamamos **equações equivalentes** e utilizamos o sinal equivalente " $\Leftrightarrow$ “ para as representar.

Para a resolução de uma equação precisamos de passar de uma equação inicial para outras, habitualmente mais simples, que lhe são equivalentes. Para obter equações equivalentes é necessário recorrer a dois princípios:

> **Princípio de equivalência da adição:** Se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente.
>
> **Princípio de equivalência da multiplicação:** Se multiplicarmos ou dividirmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente.

Os princípios de equivalência sugerem duas regras práticas:

> **1.ª regra prática:** numa equação, podemos passar um termo de um membro para outro, trocando-lhe o sinal e obtemos uma equação equivalente.
>
> **2.ª regra prática:** numa equação, podemos multiplicar ou dividir ambos os membros pelo mesmo número diferente de zero e obtemos uma equação equivalente.

As regras práticas, tal como o nome indica, são formas mais práticas e eficazes de resolução de equações.

3.4 Estratégias de ensino e recursos

Devido à pandemia que se instalou, a intervenção foi dividida em dois momentos. O primeiro composto por duas aulas presenciais, tendo havido uma interrupção letiva que implicou a passagem para um ensino à distância. Como tal, o segundo momento da intervenção correspondeu a nove aulas que foram lecionadas à distância, cada uma delas dividiu-se em duas aulas, uma síncrona e outra assíncrona.

3.4.1 Abordagem de ensino

Debruçar-nos-emos, em primeiro lugar, nas duas aulas lecionadas presencialmente. Um dos principais objetivos de ensino que pretendi alcançar foi promover o pensamento algébrico dos alunos, ou seja, optando por aulas de caráter exploratório no ensino presencial, incentivando assim à modelação, simbolização, generalização e outros aspetos que caracterizam o pensamento algébrico (Kaput, 1999; Oliveira, 2009; Ponte, Branco & Matos, 2009).

As aulas de caráter exploratório têm, habitualmente, uma organização em três ou quatro fases (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein et al., 2008), consoante se separe a fase discussão da de sistematização ou não. Considero que o papel da fase de sistematização é bem diferente do da discussão, sendo o primeiro mais focado no professor e o segundo nos alunos. Na discussão coletiva o objetivo é a partilha de ideias por parte dos alunos, havendo uma interação entre um aluno a apresentar no quadro e o grupo turma, tendo o professor apenas o papel de guiar a discussão ou proceder ao questionamento de modo a incentivar a ir mais além em justificações matemáticas, promovendo a qualidade matemática das explicações e argumentações e, além disso, regulando as interações entre os alunos na discussão (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). A sistematização é mais focada no professor, pois corresponde ao momento da aula onde se retiram as conclusões das principais aprendizagens matemáticas realizadas na aula (Canavarro, 2011), sendo que os alunos, nesta fase, com a ajuda do professor, reconhecem os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, estabelecem conexões com aprendizagens anteriores, etc. (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Estes momentos da aula, mencionados acima, diferem na medida em que, na discussão coletiva o professor tem um papel de orientador, sendo que as informações matemáticas são dadas pelos alunos e na sistematização já serão dadas pelo professor que em conjunto com a turma identifica conceitos, procedimentos, regras, faz conexões, etc. Posto isto, optei pelo modelo em quatro fases na minha prática letiva tal como apresentam Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) enumerando as seguintes fases: i) lançamento da tarefa; ii) exploração pelos alunos; iii) discussão coletiva; iv) sistematização.

Já referi em que consiste a discussão coletiva e a sistematização. Debruçando-me agora na primeira fase da aula, o lançamento da tarefa, a finalidade desta fase da aula é que os alunos compreendam o objetivo da proposta que lhes é apresentada, familiarizem-se com o contexto da tarefa, esclareçam dúvidas relativas ao enunciado, estabeleçam conexões com conteúdos anteriores, que se sintam desafiados para o trabalho e que tenham o ambiente e recursos necessários para o realizar (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

A "exploração pelos alunos" ou realização da tarefa consiste na resolução por parte dos alunos da tarefa proposta na fase de lançamento da mesma, podendo a metodologia de trabalho variar entre individual, a pares, pequenos ou grandes grupos. No primeiro momento da minha intervenção, ou seja, nas aulas presenciais, a metodologia escolhida foi o trabalho a pares.

Nesta fase de realização da tarefa o professor tem o papel de apoiar os alunos, tentando ajudar a dissipar dificuldades, mas sempre atendendo que não deve dar as respostas de modo a reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998) ou a uniformizar as estratégias de resolução que poderão vir a surgir (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Para além do apoio ao trabalho autónomo, o professor deve também monitorizar, selecionar e sequenciar as resoluções dos alunos a serem apresentadas na fase seguinte da discussão coletiva de modo a torná-la mais enriquecedora, proporcionando uma aprendizagem significativa aos alunos (Stein et al., 2008).

Debruçar-nos-emos agora nas aulas lecionadas à distância. Mas, o que se entende por ensino à distância? Trata-se de uma modalidade de educação em que o aluno, por circunstâncias várias, estuda sem frequentar fisicamente uma sala de aula (Rocha et al., 2020). É consensual que o ensino à distância acarreta algumas limitações, tais como, acessibilidade e exigência de alguma responsabilidade que poderá ficar aquém em alunos mais novos (Bates, 2020).

A dificuldade de acesso prende-se com famílias cujo acesso à internet é limitado ou até nulo dificultando a lecionação de aulas via videoconferência ou a partilha de materiais via plataformas eletrónicas. Apesar da sociedade estar cada vez mais tecnológica e virtualmente interligada, ainda existem muitas famílias sem acesso à internet ou sem um computador em casa. Nesse sentido, esta é uma grande limitação, na medida em que, nenhum aluno de uma turma deve ser deixado para trás ou ser prejudicado pelos recursos que lhe carecem. Caso o ensino à distância viesse a ser um componente necessário, alguns passos teriam de ser dados ao nível governamental com o intuito de proporcionar a todos um acesso adequado à internet e aos equipamentos eletrónicos necessários (Bates, 2020).

Em Portugal, com o intuito de combater um pouco a falta de acessibilidade de alguns alunos, criou-se o "Estudo em Casa". Uma iniciativa da Direção Geral da Educação (DGE) que consistiu na partilha de aulas das várias disciplinas e dos vários anos de escolaridade pela televisão num canal de livre acesso a todos. Pela falta de convergência entre os conteúdos a serem lecionados no "Estudo em Casa" e os tópicos da minha intervenção letiva e pelo facto de os alunos da turma alvo da minha intervenção terem os recursos tecnológicos necessários para o ensino a distância, não recorri a esta iniciativa. Contudo, considero que esta tenha sido uma medida de extrema importância para combater uma das limitações do ensino à distância.

A segunda limitação levantada por Bates (2020), é o ensino à distância não ser tão apropriado para alunos mais novos. O autor considera que ir à escola é muito mais do que ir aprender a ler, escrever etc., é uma oportunidade de conviver com os outros em comunidade, aprender a ter responsabilidade pelas suas ações, aprender que existem pessoas diferentes de nós com gostos diferentes dos nossos, mas que merecem tanto respeito como qualquer outra pessoa e aprender a respeitar outros adultos que não pertencem ao seio familiar (professores, funcionários da escola, etc.).

Todas as crianças, principalmente as mais novas, necessitam de brincar e aprender socialmente com crianças da mesma idade, aprendendo a partilhar. Certamente que a família tem responsabilidade neste tipo de desenvolvimento, no entanto, a escola é como um reforço ao mesmo. Além disso, o ensino à distância requer um grau de responsabilidade superior, visto que, na escola existem horários de entrada, existem aulas com tempo fixo e existe o professor que é responsável pela sua turma. Em casa, um familiar pode ajudar, mas não é a sua função principal, por outros afazeres não estar em constante monitorização do aluno como está o professor. Bates (2020) considera mesmo que o ensino à distância é um "pobre" substituto do ensino regular para crianças com menos de 15 anos.

Para as aulas à distância vários recursos podem ser utilizados, como vídeos e plataformas de videoconferência. No caso dos vídeos, os professores podem apresentar conceitos e antecipar dúvidas ou dificuldades dos alunos. Trata-se de uma opção por ensino à distância de forma assíncrona e onde é adotada uma perspetiva expositiva do ensino. Este recurso é posteriormente partilhado de formas diversificadas tais como, moodle ou a outra plataforma com características similares existente na instituição. O segundo recurso, softwares de videoconferência, permite uma aproximação às aulas comuns. Neste caso estamos numa situação de ensino à distância síncrona, em que todos participam no processo de ensino e aprendizagem ao mesmo tempo. É assim possível a existência de interação entre o professor e os alunos, bem como entre estes últimos (Rocha et al., 2020).

O método escolhido para a introdução da resolução de equações algébricas baseou-se no trabalho apresentado por Nobre (2018), apresentando as equações na hierarquia de complexidade apresentada no capítulo do enquadramento curricular e didático (secção 2.2). A autora apresenta aos alunos problemas envolvendo o método da balança de pratos (método apresentado na secção 2.2.3 do capítulo do enquadramento curricular e didático) e, posteriormente, ao trabalho autónomo na tarefa, desenvolve uma discussão coletiva onde vai expondo os conteúdos aos alunos. Na impossibilidade de elaborar uma discussão coletiva entre tarefas com os alunos devido às circunstâncias em que nos apresentávamos, optei por resolver os problemas e, posteriormente, sintetizar os conteúdos, em vídeo.

Considero essencial a compreensão plena dos princípios de equivalência para uma posterior passagem para as regras práticas. Julgo que se apenas fosse apresentado aos alunos as regras, estes iriam interiorizá-las e utilizá-las de forma mecânica sem envolvimento de compreensão, o que ajudaria à ideia da matemática como conjunto de regras mecanizadas que eu considero não ser a forma mais correta de aprendizagem. Por vezes, as dificuldades que surgem nas Equações Algébricas prendem-se, por um lado, com o ritmo a que é desenvolvido este tópico, habitualmente demasiado acelerado, devido ao programa que é necessário ser cumprido e, por outro, ao modo como o tema é apresentado aos alunos ou exposto no manual, ou seja, de uma forma muito formal que não permite a ponte entre a aritmética que lhes é familiar, e a álgebra que se inicia e que gera grandes dificuldades à sua chegada (Herscovics & Lincheviski, 1994). Como tal, o método da balança de pratos permite a aprendizagem deste tópico de modo informal, passando progressivamente à formalidade dos princípios de equivalência, mas tendo como base os conhecimentos prévios dos alunos, aquilo que eles conhecem da realidade, o que possibilita uma transição mais suave para a álgebra formal.

3.4.2 Tarefas

Um aspeto importante do documento das Aprendizagens Essenciais de Matemática do 7.º ano (DGE, 2018) é o facto de integrar três conteúdos de aprendizagem: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. Para desenvolver estas capacidades, vários autores realçam a importância de apresentar tarefas desafiantes para desenvolver novas abordagens em sala de aula, nomeadamente, dando aos alunos a oportunidade de comunicar e discutir as suas ideias com o professor e os colegas.

A seleção cuidada de tarefas a propor em sala de aula é um fator crucial para a promoção do raciocínio matemático e do pensamento algébrico, na medida em que, se as tarefas selecionadas consistirem apenas em exercícios, (tarefas de aplicação direta e de procedimentos conhecidos (Ponte, 2005)), os objetivos não seriam alcançados. É necessário criar um certo grau de desafio aos alunos, para tal, o uso de tarefas de caráter exploratório é importante para incentivar ao raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2016) e aos vários processos a ele inerentes. No caso desta unidade didática, dando especial ênfase à justificação matemática, processo a que diz respeito a minha investigação. Contudo, não é recomendado nem desejável que as fichas de trabalho incluam apenas tarefas muito desafiadoras. Demasiadas questões desafiadoras podem ser desadequadas devido a questões de tempo e levar os alunos a perder o interesse. A estrutura e o nível de desafio da tarefa devem atender à turma à qual a mesma será proposta (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Para a construção de tarefas cujo principal objetivo é o incentivo à justificação matemática dos alunos é necessário atender às seguintes características apontadas por

James, Casas e Grant (2017): i) dar tempo para os alunos trabalharem com casos particulares inicialmente e compreendê-los plenamente; ii) incentivar a justificação prematura e com frequência em tarefas; iii) levar os alunos a utilizar diversas representações; iv) discutir várias estratégias; v) definir expectativas altas pedindo justificações mais profundas; e vi) ter em atenção que identificar que um padrão existe não significa a compreensão do porquê.

Algumas das características para as tarefas matemáticas apresentadas anteriormente sobrepõem-se com as que são enunciadas para o ensino exploratório apresentadas por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), nomeadamente, o incentivo às justificações, à utilização de várias representações, etc. Isto revela que a metodologia de ensino exploratório é a mais favorável para a promoção também da justificação matemática. Assim, aquando da seleção de tarefas para propor em sala de aula, muitos aspetos foram tidos em conta de modo a proporcionar aos alunos a promoção do pensamento algébrico, do raciocínio matemático e consequentemente da justificação matemática levando os alunos a adquirir aprendizagens significativas nesse domínio.

No entanto, uma tarefa, por si só, não é suficiente para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. As ações do professor são igualmente centrais para envolver os alunos em situações que realçam os processos de raciocínio matemático, tais como a justificação (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Para o ensino presencial, como referi, dei preferência às tarefas de caráter exploratório pelos benefícios que apresentam na promoção do raciocínio matemático. No entanto, uma vez que estas tarefas apresentam, em geral, um grau de desafio superior em relação às restantes, em que o apoio do professor se torna essencial, a passagem para o ensino à distância veio dificultar a manutenção da mesma metodologia.

No ensino à distância, além dos exercícios de aplicação direta que são essenciais para a consolidação de conhecimentos (Ponte, 2005), as tarefas predominantes foram os problemas envolvendo equações. Isto porque se apenas forem apresentados exercícios aos alunos estes poderão perder o interesse, enquanto que se lhes forem propostas tarefas desafiantes poderão incutir-lhes o gosto pelo raciocínio (Pólya, 1975). Um problema comporta um certo grau de dificuldade pois, se este for demasiado acessível torna-se num exercício. No entanto, é necessário que esse grau de desafio seja adequado à turma para que não se corra o risco de desmotivação dos alunos na sua resolução (Ponte, 2005). Segundo Pólya (1975), o professor deve propor problemas aos alunos com o intuito destes se sentirem desafiados e ganharem o gosto pela descoberta ao terem a sensação de triunfo após a chegada à solução. O autor evidencia ainda que este tipo de experiências poderá proporcionar ao aluno o gosto pelo trabalho mental.

Como referi, um dos conteúdos presentes nas Aprendizagens Essenciais de Matemática do 7.º ano de escolaridade (DGE, 2018) é a resolução de problemas, sendo evidenciada ao longo de todo o documento. Também o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), salientam este conteúdo como essencial ser desenvolvido. Além disso, em ambos os documentos curriculares mencionados, está presente nos tópicos a abordar no tema das Equações Algébricas, a resolução de problemas envolvendo equações, logo, é um conteúdo que está amplamente relacionado com a Unidade Didática lecionada. Tanto ao nível das obras de autores conceituados como dos documentos curriculares em vigor, é salientado que a resolução de problemas constitui um traço fundamental para a aprendizagem matemática dos alunos.

Os vários tipos de tarefas diferem pelo grau de desafio (perceção da dificuldade da tarefa), reduzido ou elevado e pelo grau de estrutura, aberto ou fechado, ou seja, numa tarefa fechada é claramente dito o que é dado e o que é pedido, ao contrário de uma tarefa aberta (Ponte, 2005). Segundo este autor, os exercícios são tarefas fechadas e de desafio reduzido, os problemas são tarefas fechadas mas com elevado desafio e as tarefas de caráter exploratório são abertas e apresentam um desafio reduzido.

Branco (2008), na sua investigação, recorreu a tarefas de caráter exploratório, investigativo e a problemas. A autora revela que as mesmas proporcionaram um envolvimento por parte dos alunos na atividade matemática a realizar e na partilha de ideias e descobertas, salientando que os alunos se mostraram bastante empenhados, contrariamente ao que acontecia quando eram realizadas tarefas de caráter mais fechado.

Em suma, ao longo da intervenção recorri a três tipos de tarefas, de caráter exploratório nas aulas lecionadas presencialmente e exercícios e problemas nas aulas lecionadas à distância. Recorri a fichas de trabalho que apresentavam diversas tarefas de caráter distinto ou a tarefas disponibilizadas pelo manual em vigor no estabelecimento de ensino onde ocorreu a minha prática de ensino supervisionada (Passos & Correia, 2019).

3.4.3 Outros Recursos

Todos os alunos têm um IPad para uso na sala de aula, o que ajuda muito na utilização de tecnologia para melhoria das suas aprendizagens. Também aos professores é disponibilizado um IPad de modo a estes poderem estar interligados com os alunos através do aparelho eletrónico. Este facto permitiu que as tarefas não fossem impressas e fossem enviadas para os alunos sempre que possível, sendo que os mesmos tinham acesso ao enunciado de cada tarefa através do ecrã do seu próprio IPad.

Os materiais utilizados pelos alunos nas duas primeiras aulas da intervenção que ocorreram presencialmente foram o IPad e fichas de trabalho que os alunos tiveram acesso através do seu aparelho eletrónico. Para além dos materiais referidos, os recursos que utilizei foram ainda cubos e autocolantes em cartão que permitiram uma melhor compreensão do enunciado de uma tarefa proposta na primeira aula (Anexo 2) e uma tabela de registo de participações.

As projeções foram efetuadas através do IPad, pelo que foram fotografadas as resoluções dos alunos e projetadas para, nas discussões coletivas, estes apresentarem as suas resoluções e explicá-las aos colegas, poupando tempo que seria desperdiçado se os alunos tivessem de as reproduzir para o quadro.

Em relação aos recursos utilizados nas aulas lecionadas à distância, o primeiro corresponde a vídeos explicativos. Recorri à plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/) para encadear cada aula assíncrona da minha intervenção. Partilhei na plataforma os slides com os conteúdos de cada aula, bem como os vídeos que elaborei onde foram expostos os conteúdos relacionados com cada aula e propostas de tarefas do manual ou fichas de trabalho a realizar.

Os alunos tinham um prazo para entregar as tarefas propostas na aula assíncrona para, posteriormente, na aula síncrona, ser possível retirar dúvidas e resolver todas as tarefas. Para o contacto com os alunos na aula síncrona, a plataforma utilizada foi o Microsoft Teams.

Como referi, na aula síncrona todas as tarefas propostas eram resolvidas. Para a resolução das várias tarefas propostas na aula assíncrona elaborei um PowerPoint com as mesmas. Optei por não apresentar a resolução de cada questão de uma só vez para que a aula fosse dinâmica e não houvesse apenas exposição das resoluções para os alunos copiarem. Assim, construí animações em cada passo da resolução que permitiu que a mesma fosse surgindo no slide. Como tal, para cada tarefa solicitava a participação de um aluno e este ia indicando os vários passos da resolução.

Procurei que, na aula síncrona, toda a turma estivesse envolvida, evitando que o mesmo aluno participasse várias vezes. Recorri a uma tabela de participações onde fui apontando quem participava, assim, quando já não havia voluntários, selecionava quem ainda não tinha participado.

O manual adotado pelo Colégio Militar (Passos & Correia, 2019), segue o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), portanto, muitas das tarefas presentes no capítulo Equações recorrem a funções, o que fez com que algumas delas não pudessem ser propostas aos alunos. Este facto, implicou a utilização de outros recursos de ensino, como fichas de trabalho elaboradas e selecionadas por mim.

3.5 Avaliação

Na prática letiva que ocorreu, recorri a duas modalidades de avaliação: avaliação formativa e sumativa.

Debrucemo-nos sobre a avaliação formativa. Recorri a esta modalidade de modo a apoiar a aprendizagem dos alunos, visto que, tal como sugerem os autores Pinto e Santos (2006), esta permite apoiar o professor na construção de situações de ensino e aprendizagem mais eficazes, na medida em que, fazendo uma análise às resoluções dos alunos e tendo uma perspetiva das dificuldades que emergem, é possível adaptar futuras aulas atendendo a essas mesmas dificuldades. Além disso, recorrendo ao feedback escrito e oral ao aluno, é possível ajudá-lo a ultrapassar essas mesmas dificuldades, havendo um apoio à sua aprendizagem.

Os mesmos autores elaboraram uma sintetização de pontos comuns a diversas definições de avaliação formativa que passo a nomear: “o principal destinatário da avaliação é o aluno e a sua própria aprendizagem”; “implica o aluno na sua aprendizagem através de um processo de tomada de consciência sobre as suas dificuldades e os seus sucessos”; “procura adaptar-se à singularidade do aluno, devendo ser subtil e aberta à pluralidade”; “não se limita à observação estática, mas ao desencadear de uma intervenção pedagógica sobre o ensino, sobre a aprendizagem ou sobre ambas”;

“identifica os erros e as dificuldades dos alunos para perceber as suas causas” (p. 102). Em suma, a avaliação formativa destina-se a ajudar o aluno e o processo de ensino e aprendizagem, fazendo um (re)investimento da informação produzida através dos dados recolhidos. Para a avaliação formativa recorri ao feedback escrito e ao questionamento oral.

A avaliação formativa esteve bastante presente na minha intervenção letiva, na medida em que, ao longo de toda intervenção foram propostas 9 atividades aos alunos compostas por diversas tarefas a realizar. Todas as resoluções dos alunos foram-me entregues e tive a oportunidade de as analisar, corrigir e fazê-las acompanhar por um breve comentário a elogiar o trabalho realizado ou a identificar aspetos a melhorar, de modo a incentivar à reflexão sobre alguns aspetos das suas resoluções ou reconhecer o saber demonstrado. Alguns dos comentários tecidos às produções dos alunos foram os seguintes: “Resposta?”; “Justificação?”; “Muito bem, continue a trabalhar!”; “Rever os princípios de equivalência.”; “Ótima justificação!”. Comentários estes que procurei que fossem reguladores e seguissem algumas características como, clareza, incentivar a que o aluno reanalise a sua resolução ou o próprio conteúdo e identificar o que está bem feito promovendo a autoconfiança.

O questionamento oral ocorreu, nas aulas presenciais, aquando do apoio dado individualmente aos alunos no trabalho autónomo, onde, quando surgia dificuldades, procedia ao questionamento para permitir que o aluno identificasse o seu próprio erro. Surgiu ainda aquando da discussão coletiva, onde mais uma vez, questionava o aluno a apresentar a sua resolução ou a turma, de modo a apoiar o raciocínio ou permitindo uma análise à resolução por parte da turma.

Nas aulas lecionadas à distância, o questionamento oral surgiu nas aulas síncronas realizadas com suporte na plataforma Microsoft Teams. Tendo já feito uma análise prévia das produções dos alunos, atendi às dificuldades que emergiram e quando surgia uma situação que tinha gerado dificuldades procedia ao questionamento de modo a incentivar à reflexão e esclarecer dúvidas.

Debrucemo-nos agora na avaliação sumativa, cujos recursos foram um teste de avaliação (Anexo 5) e tarefas propostas ao longo de todas as aulas lecionadas à distância. A quantificação dos conhecimentos dos alunos torna-se necessária devido à classificação que tem de ser atribuída ao aluno no final de cada semestre, classificação essa quantitativa.

Como nas aulas à distância não é possível avaliar alguns aspetos como o empenho no trabalho autónomo, por exemplo, que são observáveis em sala de aula, foi decidido, a par com a professora cooperante, classificar todas as tarefas que foram propostas de modo a ter mais um elemento para a avaliação sumativa dos alunos.

Para a realização de um teste de avaliação à distância recorri à plataforma Microsoft Forms que possibilita a disponibilização do teste aos alunos, estes resolvem na plataforma e submetem as respostas dadas. O teste de avaliação era composto por dez questões de escolha múltipla exclusivamente sobre o tema das equações. Na Tabela 10 apresento os objetivos e os conceitos envolvidos em cada questão:

Tabela 10: Conceitos envolvidos e objetivos das questões do teste de avaliação.

Questão	**Objetivos e conceitos envolvidos**
1	- Identificar uma equação de entre equações, expressões algébricas e inequações.
2	- Conhecer as noções de membro e termos independentes de equações.
3	- Conhecer a noção de termos independentes de equações. - Identificar os termos independentes presentes numa equação dada.
4	- Identificar a equação cuja solução é um número dado no enunciado.
5	- Identificar equações equivalentes.
6	- Recorrer aos princípios de equivalência ou às regras práticas de resolução de equações. - Identificar a solução de uma equação dada.
7	- Recorrer aos princípios de equivalência ou às regras práticas. - Identificar uma equação com solução negativa.
8	- Recorrer aos princípios de equivalência ou às regras práticas. - Identificar o conjunto solução de uma equação dada.
9	- Resolver um problema envolvendo perímetros de figuras e equações.
10	- Resolver problemas.

3.6 Reflexões sobre as aulas lecionadas

Nesta secção apresento as reflexões realizadas após cada aula da intervenção. É de salientar que cada reflexão foi realizada com base nas notas de campo que elaborei após o término de cada aula e, nas duas primeiras aulas presenciais, com base na gravação vídeo realizada e, principalmente nos comentários tecidos pelas minhas orientadoras no final de cada uma dessas aulas.

3.6.1 Aula de 2 de março de 2020

A primeira aula da unidade didática ocorreu no dia 2 de março de 2020 (Plano de aula: Anexo 6), tendo como principais objetivos dar a conhecer aos alunos o conceito de expressões algébricas, bem como, o modo de as simplificar.

O trabalho realizado na aula teve como base a Ficha de trabalho "Expressões algébricas" (Anexo 1). A primeira questão da tarefa iniciou-se com a sua apresentação, essencial para a compreensão do que era pedido e das construções ilustradas na tarefa. Para tal, foi fulcral o uso do modelo físico semelhante à construção descrita na tarefa, de modo a dissipar qualquer tipo de dúvida relativa à elaboração das várias construções.

Seguidamente, o trabalho autónomo realizado nas questões 1.1 e 1.2 também foi bem conseguido para a grande maioria dos alunos. As questões diziam respeito à unidade anterior em que os alunos haviam estado a trabalhar e onde revelaram alguma facilidade. No entanto, e devido a uma estratégia aprendida para determinar mais rapidamente o termo geral de uma sucessão, houve poucas estratégias diversificadas a surgir, bem como termos gerais distintos, o que provocou uma discussão menos rica e uma entrada na questão 1.3 menos intuitiva que implicou alguma estranheza por parte dos alunos nesta questão e pouca compreensão do porquê da resolução ser da forma como foi apresentada e não de outra.

Apesar do que referi, a discussão foi interessante, tendo surgido dois raciocínios distintos que foram bem explicados no quadro por dois alunos para toda a turma. No entanto, a interação entre o aluno a apresentar e os alunos a assistir foi quase nula, sendo este um aspeto a melhorar para as seguintes aulas, de modo a extrair das discussões boas argumentações, refutações e justificações de estratégias dos alunos.

Posteriormente à discussão das questões 1.1 e 1.2, introduzi a noção de expressão algébrica, bem como alguma terminologia que eu julgo ter sido bem aceite pelos alunos.

Caso tivessem surgido termos gerais distintos a entrada na questão 1.3 teria mais significado para os alunos na medida em que, estes compreenderiam mais facilmente que poderá haver várias expressões equivalentes que correspondem ao termo geral de uma mesma sucessão. A questão 1.3 a) foi resolvida em grupo turma, para que todos conseguissem avançar nas seguintes alíneas, momento este que aproveitei para introduzir a simplificação de expressões. Este tema é delicado e não é intuitivo para os alunos, pelo que gerou algumas dificuldades nos mesmos. Na minha explicação faltou alguma sistematização das ideias principais a reter, de modo a estes ficarem esclarecidos dos procedimentos a seguir aquando da simplificação de expressões algébricas. Esta ausência de sistematização teve como consequência algumas dificuldades nas restantes alíneas da questão 1.3. Para reverter a situação, para a aula seguinte, poderei realizar essa mesma sistematização de modo a esclarecer alguns aspetos que geraram dificuldades anteriormente.

O trabalho com a simplificação de expressões algébricas fez emergir muitas dificuldades nas operações aritméticas com números inteiros para a generalidade da turma. Este facto implicou que em dois momentos de discussões coletivas esclarecesse alguns aspetos relativos a este tópico, nomeadamente, adição entre números inteiros negativos e positivos, distinção entre sinal operacional e sinal posicional, etc.

Nesta aula foi ainda possível refletir relativamente à constituição de algumas díades que tinha selecionado e que revelaram não resultar, bem como, outras que trabalharam muito bem e discutiam entre si de forma interessada e envolvida. A partir desta reflexão ponderei, para as aulas seguintes, a alteração de algumas dessas díades que poderá contribuir para uma melhoria do trabalho dos alunos e facilitar a gestão de sala de aula.

Outro aspeto a refletir são os prós e contras da utilização do IPad em sala de aula. Nesta aula, o IPad apenas foi utilizado para os alunos terem acesso ao enunciado da ficha de trabalho, ou seja, ter o IPad ou ter a ficha de trabalho em papel não alterava em nada o trabalho dos alunos. Pude observar que o facto de estes terem o IPad provocou distração de diversos alunos aquando das discussões coletivas, em que senti que estes não estavam focados no trabalho que estava a ser realizado. Neste sentido, nesta aula, a utilização do IPad não foi uma estratégia que tenha ajudado à aprendizagem dos alunos, foi sim um elemento distrator. Nas seguintes aulas terá de ser bem pensada a utilidade deste recurso, bem como uma melhoria da gestão de sala de aula com a utilização do mesmo. Julgo que, uma medida que irei implementar é, aquando da discussão coletiva, os ecrãs dos IPad estarem desligados, de modo a estes estarem focados no trabalho que está a ser realizado.

A justificação é algo que os alunos não estão habituados na disciplina de Matemática. Muitos, aquando do trabalho autónomo questionavam "como justifico professora?", tive de recorrer muito ao questionamento de modo a promover as justificações dos alunos. O passo seguinte é que estes comecem a passar essas justificações para o papel.

Na discussão coletiva, os alunos já estavam habituados a ir ao quadro resolver a questão e, posteriormente, explicar aos colegas os passos que efetuaram e respetiva justificação, no entanto, também neste momento, recorri ao questionamento, tanto ao aluno a apresentar como à turma, de modo a promover justificações mais profundas. Nesta aula, devido à distração provocada, em parte, pelo IPad ou por díades mal selecionadas, as questões feitas à turma, eram muitas vezes respondidas pelos mesmos 1 ou 2 alunos ou questões simples como "10-8" demoravam algum tempo a ser respondidas, como tal, em aulas seguintes recorrerei a perguntas diretas a alguns alunos que eu considero que estejam mais distraídos, com o intuito de os despertar para o trabalho que está a ser realizado em aula.

Relativamente ao cumprimento da planificação elaborada, ponderei muito mal o tempo de cada momento da aula, nos primeiros cinquenta minutos a realização da questão 1.3 a) que eu ponderei demorar 5 minutos alargou-se porque introduzi também a simplificação de expressões algébricas que ainda demorou alguns minutos da aula. Mas o momento que fez com que o plano de aula não tivesse sido, de todo, cumprido, foi o trabalho autónomo da questão 1.3, bem como, a respetiva discussão coletiva. Na minha perspetiva, julguei que resolvendo a alínea a) em grupo turma, aceleraria a realização das restantes alíneas por parte dos alunos, no entanto, isso não aconteceu. Toda a turma sentiu grandes dificuldades nesta questão, como já referi, e que fez emergir também dificuldades em conteúdos de anos anteriores, este facto fez com que também a discussão coletiva demorasse mais porque tive de dar algumas explicações relativamente a esses conteúdos. Assim, a segunda metade da aula foi quase integralmente para a resolução e discussão da questão 1.3. Foi ainda possível proceder à apresentação da questão 1.4, algo que não estava previsto no plano, mas que senti a necessidade de o fazer em aula pois, estavam a surgir algumas dúvidas relativas ao enunciado e houve alunos a iniciar ainda esta questão, não sendo possível qualquer tipo de discussão relativamente à mesma. A realização da questão 1.4 e 2 passou para a segunda aula da intervenção.

Concluindo, esta foi uma aula que, caso a repetisse haveria muitos aspetos que alteraria do ponto de vista de gestão de sala de aula, gestão de tempo e sistematização de ideias a reter, no entanto, julgo que a tarefa foi bem selecionada e estava adequada a toda a turma.

3.6.2 Aula de 4 de março de 2020

A segunda aula da unidade didática ocorreu no dia 4 de março de 2020 (Plano de aula: Anexo 7) e tinha como principais objetivos consolidar os conhecimentos sobre simplificação de expressões e ainda a promoção do raciocínio matemático e da justificação matemática.

A aula iniciou-se com a discussão da questão 1.4, questão esta que julgo ter sido muito bem compreendida pela generalidade dos alunos, inclusivamente a expressão algébrica foi obtida por alunos que, por vezes, revelam mais dificuldades na disciplina. Os alunos que foram ao quadro mostrar as suas resoluções necessitaram de algum questionamento para incentivar à justificação, no entanto, foram gerados bons momentos de discussão coletiva.

Seguidamente, procedi à apresentação da questão 2 que foi essencial para os alunos compreenderem o objetivo da questão. Nesta aula, a maior dificuldade que senti foi a gestão do tempo, a questão 2 tinha muito potencial para incentivar ao raciocínio matemático, mas não me foi possível deixar muito tempo de trabalho autónomo para os alunos refletirem sobre a questão e formular justificações completas. No entanto, e apesar de não ter sido possível, aquando do trabalho autónomo, seguir e apoiar os raciocínios dos alunos, as discussões coletivas que se geraram foram muito interessantes do ponto de vista do raciocínio e das justificações matemáticas.

O aluno que foi apresentar ao quadro a sua resolução da questão 2.1, referiu que k representava caixas, esta afirmação deixou os colegas a pensar e gerou uma discussão muito interessante, em que o aluno que estava no lugar refutou a ideia do colega e corrigiu a sua afirmação, ou seja, nesta aula, para além das justificações interessantes que surgiam no quadro, houve ainda interação entre alunos a assistir e alunos a apresentar, algo que se tinha verificado pouco até então, o que permitiu uma discussão muito mais interessante e que envolveu toda a turma.

Seguidamente, um aluno foi apresentar a sua resolução da questão 2.2, mas foi necessário pedir para este apresentar os cálculos que o levou à resposta, bem como a justificação da mesma, isto leva a refletir que com alguns alunos, o incentivo à justificação terá de ser maior, pelo que, durante todas as aulas da intervenção terei de ter atenção a este aspeto.

Por falta de tempo, passou-se à frente a questão 2.3 e seguiu-se para a discussão em grupo turma das questões 2.4 e 2.5, discussões estas que permitiram um momento interessante em que senti que todos os alunos estavam envolvidos. Principalmente na questão 2.5, que levanta questões mais interessantes do ponto de vista da discussão e que gerou algumas dúvidas aos alunos e, consequentemente, uma boa troca de ideias neste momento da aula.

Julgo que um aspeto positivo foi a tarefa escolhida, que permitiu estas discussões e que me pareceu acessível a todos os alunos da turma. Selecionar a tarefa correta é algo muito desafiador, visto que esta turma é muito heterogénea.

A planificação não foi cumprida na totalidade visto terem ficado por fazer as questões 2.3 e 2.6, questões estas que pedi aos alunos para realizarem como trabalho de casa.

Relativamente às díades que tinham sofrido alterações devido à primeira aula, julgo que melhoraram o trabalho dos alunos envolvidos, bem como ajudou na gestão de sala de aula.

Devido à confusão gerada na aula anterior devido aos IPad durante os momentos de discussão, decidi nesta aula não os utilizar e senti que, nas várias discussões coletivas, houve mais alunos a estarem focados e interessados.

Concluindo, considero que esta aula foi muito interessante e rica em termos de discussão e, apesar da corrida contra o tempo, possibilitou momentos de troca de ideias muito positivos e que demonstram interesse e envolvimento, para além disso, senti uma evolução na discussão coletiva, na troca de ideias entre alunos e nas justificações dadas no quadro.

3.6.3 Aula de 17 de abril de 2020

A primeira aula assíncrona da unidade didática realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/) teve início no dia 17 de abril de 2020, através da partilha dos recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 8). A resolução das tarefas matemáticas ali propostas foi enviada pelos alunos para a professora cooperante até ao dia 19 de abril de 2020.

A aula teve como primeiro objetivo rever a terminologia associada às expressões algébricas, bem como, o modo de as simplificar, visto que a aula onde abordámos este tema tinha ocorrido há mais de um mês. É essencial que este conteúdo ficasse bem claro para os alunos de modo a permitir o conhecimento de alguma manipulação algébrica muito importante no estudo de equações.

O segundo grande objetivo da aula consistiu na introdução ao estudo de equações, onde os alunos ficaram a conhecer o que é e para que serve uma equação, bem como algumas designações associadas ao tema que facilitam a comunicação.

A aula iniciou-se com a revisão, através de uma sistematização escrita dos passos a seguir para a simplificação de uma expressão algébrica de que os alunos poderiam já não se recordar. De seguida apresentei um vídeo onde simplifiquei uma expressão algébrica com base nos passos que falei anteriormente. A expressão algébrica escolhida coincidiu com a do exercício 2.3 da ficha de trabalho “Expressões algébricas” (Anexo 1) que foi trabalhada na 1.ª e 2.ª aulas da unidade didática. Este exercício em específico tinha sido pedido como trabalho de casa e os alunos revelaram algumas dificuldades na sua resolução, como tal decidi escolhê-lo para esclarecer dúvidas e também porque considerei ser uma expressão algébrica adequada para resolver como exemplo inicial, visto ter duas situações onde é necessário desembaraçar de parêntesis em que, por vezes, os alunos cometem erros.

Julgo que os materiais acima referidos resultaram bem para a aprendizagem, visto que a grande maioria dos alunos revelou compreensão dos conteúdos no exercício proposto posteriormente com 4 expressões algébricas para simplificar, que incluíam não só parêntesis, mas também frações. Todos seguiram os passos que foram recordados nas revisões e procederam também à utilização da propriedade distributiva de forma correta.

As maiores dificuldades que emergiram nas quatro alíneas com expressões algébricas para simplificar, foram aquando da aplicação da propriedade distributiva, dado que quando surgia uma multiplicação entre um número inteiro negativo e um número inteiro positivo ou entre dois números inteiros negativos, alguns alunos erraram o resultado dessa operação. Outro erro que também foi observado, embora numa minoria da turma, foi nas operações entre termos não semelhantes, o que revela ainda alguma falta de compreensão deste conteúdo.

De seguida, foi apresentado um vídeo que retirei dos recursos da plataforma Escola Virtual, onde se explica o que é e para que serve uma equação com recurso ao modelo da balança. A noção de equilíbrio presente neste modelo, que considero bastante intuitiva para os alunos, é facilmente transposta para o conceito de equação, fazendo-se a analogia entre os dois pratos da balança e os dois membros da equação.

Posteriormente ao vídeo, foram apresentados os vários conceitos das equações, nomeadamente, incógnita, solução, termos da equação, membros, termos dependentes e independentes. Ao abordar o conceito de incógnita fiz a comparação com a variável que trabalhámos, nas primeiras aulas, no estudo das expressões algébricas, isto porque considero muito importante que os alunos distingam bem o papel da letra nas várias situações.

Por fim, foi proposto os exercícios 3 e 4 da página 27 do manual que consistiam na distinção entre expressões algébricas e equações e, ainda, a identificação dos conceitos aprendidos sobre equações.

A grande maioria dos alunos distinguiu bem a equação da expressão algébrica, no entanto, houve algumas dúvidas quando surgiram equações com mais do que uma incógnita, visto que, os alunos só tinham tido contacto com esta situação em expressões algébricas, apesar disso, julgo que os materiais disponibilizados foram esclarecedores porque a grande maioria teve sucesso nesta questão.

Devido a estas dúvidas que surgiram, se repetisse a aula, talvez faria referência a equações com mais do que uma incógnita, visto que, apresentei a definição de equação linear com uma incógnita, mas nunca falei de equações de outro tipo, se o tivesse feito, estas questões poderiam não se ter levantado.

O exercício sobre os elementos constituintes das equações gerou algumas confusões. Apesar de os alunos terem, na sua generalidade, identificado corretamente os vários elementos, houve alguns erros que se prenderam com termos cujo sinal posicional era “menos” e os alunos não o colocavam. Esta dificuldade poderá ter surgido porque o exemplo apresentado no vídeo apenas continha termos com sinal posicional “mais”, talvez se surgisse esta situação anteriormente dissipasse alguns erros deste tipo que emergiram, posto isto, se repetisse a aula alteraria o exemplo apresentado por um com as características que referi anteriormente. Por último, outra dificuldade que se levantou foi a distinção entre termos do 1.º membro e 1.º membro (ou 2.ª membro), isto porque, houve alunos a identificar como termos do 1.º membro toda a expressão, em vez de apresentar cada termo separadamente.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei ainda, para cada um deles, um pequeno comentário onde incentivei a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 21 de abril de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à aula 1 da Escola Virtual, a aula abordada acima, bem como resolver todas as tarefas propostas. É de salientar que as correções das resoluções dos alunos e o feedback do seu trabalho apenas foi disponibilizado após esta aula com o objetivo de que estes participassem neste momento de aula com base nos seus conhecimentos e não pelas correções apresentadas.

Nesta primeira aula à distância, julgo que a estratégia de não apresentar a resolução de cada tarefa de uma só vez nos slides do PowerPoint foi bem conseguida para manter todos os alunos focados no trabalho que estava a ser realizado e ao mesmo tempo, permitir que estes tivessem um papel ativo na aula e não de mero ouvinte. Dos 17 alunos da turma 13 intervieram na aula, e um aspeto que considero importante é o facto de cada aluno que participava, voluntariando-se ou não, respondia com alguma facilidade às questões, pelo que revela atenção na aula e compreensão dos conteúdos que estavam a ser trabalhados.

Nas aulas seguintes procurarei que os alunos que não participaram nesta aula o façam, de modo a manter toda a turma envolvida no trabalho realizado e incentivar ao empenho nesta unidade didática, porque julgo que se os alunos sentirem que têm um papel ativo na aula se dedicarão mais na disciplina.

À medida que íamos passando pelas várias tarefas propostas na aula assíncrona ia esclarecendo as dúvidas que os alunos iam colocando e, aproveitei para salientar aspetos, evidenciados nas resoluções dos alunos, onde revelaram dificuldades, nomeadamente, salientei a multiplicação entre números positivos e negativos ou entre dois números negativos, esclarecendo o sinal do resultado de cada uma destas operações, salientei também que o sinal de menos que precede um número deve sempre ir “agarrado” ao mesmo. Outro aspeto muito importante que abordei foi as operações entre termos não semelhantes que surgiram em algumas resoluções, chamando à atenção de que é um grave erro. Muitos alunos nas expressões algébricas simplificadas não apresentavam a fração na forma irredutível, logo, este foi outro pormenor que abordei. Por fim, o último erro que salientei e corrigi foi em vez de indicarem os termos do 1.º membro apresentaram toda a expressão do 1.º membro.

Posto isto, julgo que tanto a aula síncrona como assíncrona foram adequadas à turma, dentro das circunstâncias apresentadas, visto que, sendo o apoio do professor essencial ao trabalho do aluno, a ausência deste poderia provocar acrescidas dificuldades, no entanto a dinâmica da aula síncrona e a possibilidade de retirar dúvidas ou visualizar a resolução das várias atividades permite um pouco esse apoio.

3.6.4 Aula de 21 de abril de 2020

A segunda aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 21 de abril de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 9). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 22 de abril de 2020.

A aula tinha como principal objetivo dar a conhecer aos alunos o 1,º Princípio de equivalência e respetiva regra prática para resolução de equações. Assim, após esta aula, os alunos ficariam a conhecer duas estratégias para resolver equações do tipo "$x + a = b$". Para além do principal objetivo mencionado anteriormente, foi dado a conhecer aos alunos a noção de equações equivalentes.

A aula iniciou-se com um exemplo que designei por “Peso do elefante”. Este exemplo corresponde, na verdade, a uma tarefa que tinha elaborado para as aulas presenciais onde seriam os alunos a resolver este problema ainda sem terem qualquer tipo de conhecimento sobre equações. Esta tarefa tinha, portanto, um papel de introdução ao tema das equações, onde, na discussão da mesma, surgiria então o conceito de equação e onde a resolução apresentada no vídeo seria realizada e discutida em grupo turma.

Devido ao facto de as aulas terem de ser adaptadas à modalidade à distância e na impossibilidade de haver discussão em grupo turma entre tarefas, a introdução às equações foi iniciada na aula anterior e optei por aproveitar a tarefa como exemplo para introduzir a resolução de equações.

Considero o exemplo adequado, na medida em que, estamos perante o modelo da balança cujos alunos já tinham tido contacto na aula anterior, ainda não no âmbito da resolução de equações, mas para suscitar a transposição da situação associada ao modelo físico para a escrita da equação.

Julgo que resolver o problema utilizando a manipulação dos pesos da balança é facilmente compreendido pelos alunos e é intuitivamente adaptável à escrita matemática, ou seja, neste caso, na passagem para equações. Nomeadamente, na introdução ao 1.º Princípio de equivalência, visto que dizer "retirar a ambos os pratos da balança um peso de 50g" é facilmente transposto para linguagem matemática dizendo "subtrair 50 unidades a ambos os membros da equação". Fica, assim, claro que é necessário subtrair igual valor a ambos os membros da equação para que a igualdade se mantenha verdadeira.

Julgo que a utilização do modelo da balança facilitou a compreensão dos alunos relativamente à resolução de equações, visto que, na aula síncrona, para justificar o porquê de adicionar ou subtrair uma mesma quantidade a ambos os membros da equação e não apenas num dos membros, alguns alunos afirmavam que seria "para manter o equilíbrio da balança".

Posteriormente ao exemplo do "Peso do elefante", dei a conhecer aos alunos a noção de equações equivalentes, necessária à compreensão da resolução de equações com recurso aos princípios de equivalência. É também essencial, após a compreensão do conceito, conhecerem o sinal de equivalente que é essencial à correta apresentação da resolução de equações.

Todo este encadeamento tinha como objetivo chegar ao 1.º Princípio de equivalência, ou seja, apenas após o exemplo abordado e a noção de equações equivalentes, foi atribuído um nome ao método que haviam utilizado para resolver a equação do "Peso do elefante". Foi também neste momento da aula que lhes dei a conhecer o modo de apresentação da resolução de equações, utilizando os sinais de equivalência.

Por fim, propis a Ficha de trabalho n.º 1 (Anexo 2) dividida essencialmente em três tarefas principais. A primeira tinha como objetivo identificar os elementos constituintes de três equações, elementos estes abordados na aula anterior. Optei por trabalhar novamente a terminologia associada às equações para perceber se as dificuldades que surgiram anteriormente ter-se-iam dissipado ou não. Verifiquei que os erros que emergiram foram essencialmente os mesmos: diferenciação entre 1.º membro e termos do 1.º membro (ou 2.º membro) e correta colocação dos sinais posicionais dos termos, no entanto, foram registados numa minoria de alunos da turma.

A segunda principal tarefa da ficha de trabalho consistia na resolução de três equações do tipo "$x + a = b$". Considero que, para a generalidade, a tarefa correu bem, no entanto, emergiram algumas dificuldades que passo a descrever. Na aplicação do 1.º Princípio de equivalência surgiu: adicionar a ambos os membros o número igual ao que se quer eliminar em vez do seu simétrico; não colocação de sinais de equivalência nem apresentação do conjunto solução; utilização da 1.ª Regra prática em vez do 1.º Princípio de equivalência; e, por fim, incorreta apresentação da resolução, tal como $x + 3 = 9 \Longleftrightarrow 9 - 3 = 6\ ou - 5 + x = -10 = x = -5 + 5 = -10 + 5 = -5$.

Dos cinco erros que apresentei, julgo que quatro deles são compreensíveis e até diria expectáveis numa primeira tarefa de resolução de equações, no entanto, a utilização da regra prática em vez do 1.º Princípio de equivalência, é um erro que eu poderia ter acautelado um pouco mais caso, no enunciado, pedisse especificamente a sua utilização. Não o fiz porque a aula tem um encadeamento e a regra prática apenas foi introduzida após a apresentação da ficha de trabalho, além disso, no início da aula apresento indicações onde peço especificamente para passarem para o próximo slide apenas quando terminarem todas as tarefas do slide onde se encontram. No entanto, deveria ter previsto este adiantamento por parte dos alunos e, portanto, esta seria uma alteração que eu faria no enunciado desta segunda tarefa da ficha de trabalho, de modo a que mais alunos utilizassem o princípio de equivalência, tal como tinha planeado, em vez de partirem logo para a regra prática.

A última tarefa da ficha de trabalho consistia na identificação de equações equivalentes que, na generalidade, revelou-se uma tarefa onde os alunos tiveram facilidade na resposta e justificação.

O último objetivo da aula foi dar a conhecer a 1.ª Regra prática, um outro método de resolução de equações que é sugerido pelos princípios de equivalência, no entanto, e tal como o nome indica, é um método mais prático porque diminui o número de passos da resolução.

Foi apresentado um vídeo onde se resolveu novamente a equação do “Peso do elefante” com recurso ao 1.º Princípio de equivalência, mas, a partir desta resolução, foi eliminado um dos passos e foi introduzida a 1.ª Regra prática. De seguida, foi proposta uma tarefa para resolver equações utilizando a regra prática.

Julgo que o recurso utilizado e o modo como este foi explicado foi adequado visto que, os alunos revelaram mais facilidade na utilização deste método. As dificuldades que surgiram prenderam-se com o esquecimento em trocar de sinal quando se troca de membro, e digo esquecimento porque muitas das vezes aplicavam corretamente a regra prática numas alíneas e não o faziam noutras. Outra dificuldade, prendeu-se com a não apresentação do conjunto solução. Houve alunos que apresentaram o conjunto solução na tarefa de resolução de equações da ficha de trabalho cujo objetivo era recorrer ao 1.º Princípio de equivalência, mas não apresentaram nesta tarefa porque julgaram que só era necessário quando a resolução recorria ao princípio de equivalência.

Esta dificuldade surgiu porque no vídeo que elaborei, quando resolvi a equação utilizando a regra prática, não apresentei o conjunto solução, por lapso, portanto, claro que, se repetisse a aula, apresentava o conjunto solução após terminar a resolução da equação com recurso à 1.ª Regra prática.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 24 de abril de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 2.ª aula assíncrona, a aula abordada acima, bem como resolver todas as tarefas propostas. É de salientar que as correções das resoluções dos alunos e o feedback do seu trabalho apenas foi disponibilizado após esta aula com o objetivo de que estes participassem neste momento de aula com base nos seus conhecimentos e não no feedback que dei.

Mais uma vez, a participação dos alunos nesta aula foi muito positiva, dos 17 alunos da turma 12 participaram na aula, a grande maioria voluntariando-se para resolver cada uma das tarefas propostas. Para além disso, os alunos que não tinham participado na aula anterior, tiveram essa oportunidade nesta aula.

Uma preocupação em todas as aulas foi que os alunos que se voluntariam menos, participem. Para os incentivar, disse que apontava todas as participações e pedi também aos alunos que já tinham participado que permitissem que outros o fizessem.

À medida que íamos passando pelas várias tarefas propostas na aula assíncrona, fui esclarecendo as dúvidas que os alunos iam colocando e, aproveitei para salientar aspetos, evidenciados nas suas resoluções, onde tinham revelado dificuldades. Salientei a correta apresentação de equações que deve ser realizada como foi apresentado nos vídeos ou como apresento no PowerPoint com a resolução das tarefas propostas, abordei a não colocação do sinal de equivalente e conjunto solução que é algo essencial, seja qual for o método utilizado na resolução de equações, salientei que, no 1.º Princípio de equivalência, o número a adicionar tem de ser o simétrico daquele que queremos retirar do membro onde se encontra o x e, por fim, na regra prática, quando um número troca de um membro para outro tem de trocar o sinal.

Enquanto íamos passando pela resolução de equações, recorria ao questionamento ao aluno que estava a participar de modo a apoiá-lo, caso este estivesse com dificuldades ou mesmo que o aluno não apresentasse dificuldades questionava de modo a obter uma justificação da sua parte das opções tomadas. Apliquei as seguintes questões: "Qual o nosso objetivo na resolução de uma equação?"; "Para isolar o x, o que está a mais neste membro?"; "Como posso eliminar o que está a mais?"; "Qual o número que irá passar para o 2.º membro? Porquê?".

Posto isto, apesar de algumas dificuldades que foram surgindo nos alunos, julgo que a aula e a metodologia utilizada são adequadas, na medida em que, observei melhorias ao nível da participação na aula síncrona relativamente à anterior, bem como melhorias na tarefa de identificação de elementos da equação, tarefa esta semelhante à da aula anterior. Como já referi, e para permitir que o sucesso da aula fosse superior, alteraria pormenores ao nível do enunciado para que os alunos se focassem mais no objetivo que ponderei e também fazia alterações no vídeo onde não apresento o conjunto solução após terminar a resolução de uma equação.

3.6.5 Aula de 24 de abril de 2020

A terceira aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 24 de abril de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 10). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 26 de abril de 2020.

A aula teve como principal objetivo dar a conhecer aos alunos o 2.º Princípio de equivalência e respetiva regra prática. Tendo em conta os conhecimentos adquiridos nesta e na aula anterior, os alunos ficariam a conhecer ambos os princípios de equivalência de equações e as regras práticas, de modo a poderem resolver equações do tipo “$x + a = b$”, “$ax = b$” e “$ax + b = c$”. Por último, tinha como objetivo iniciar a resolução de problemas envolvendo equações, através de um problema a propor no final da aula assíncrona.

A aula iniciou-se com um vídeo onde apresentei a resolução de uma equação do tipo $ax = b$. Posteriormente à resolução, referi que a estratégia utilizada recorria ao 2.º Princípio de equivalência e este foi introduzido. Julgo que o vídeo foi adequado e passou a mensagem correta, visto que, no exercício 10 os alunos evidenciaram conhecimento dos conteúdos lecionados. A maior dificuldade prendeu-se com o facto de não atenderem à correta leitura do enunciado do exercício, visto que, este pedia que a resolução fosse feita com recurso aos princípios de equivalência e alguns alunos já recorreram à regra prática.

Uma dificuldade que emergiu, mas apenas em dois alunos da turma, foi a seleção adequada do princípio de equivalência a utilizar em cada equação. Numa equação como $4 + x = 12$, dividiram ambos os membros por 4, revelando não ter compreendido o conteúdo abordado.

Apresentei um vídeo com a resolução da alínea g) da tarefa 10 do manual. Optei por resolver esta equação porque correspondia ao primeiro exemplo de uma equação do tipo "$ax + b = c$" que surgiu na tarefa. Como uma equação deste tipo implica a aplicação dos dois princípios de equivalência aprendidos, aumenta o grau de complexidade para os alunos, e como tal considerei importante resolver esta equação, de modo a dissipar algumas dificuldades que pudessem surgir.

Se a aula fosse presencial o que teria sido feito seria dar tempo aos alunos de tentar resolver em trabalho autónomo e de seguida discutiria com eles essa mesma tarefa para depois avançarem para a tarefa 11 onde surgem mais exemplos destes. No entanto, como nas aulas à distância, o apoio ao trabalho autónomo torna-se muito difícil e a discussão não pode ser feita entre tarefas, para que os alunos não ficassem bloqueados na tarefa 11, resolvi elaborar o vídeo onde resolvo esta equação.

Uma situação que me leva a crer que a opção tomada de resolver a alínea g) em vídeo foi bem conseguida, é que, uma aluna que inicialmente realizou esta questão aplicando primeiro o 2.º Princípio de equivalência e só depois o 1.º Princípio de equivalência, de seguida, na tarefa 11, após a apresentação do vídeo, a aluna já acertou todas as alíneas com equações do tipo "$ax + b = c$", aplicando inicialmente o 1.º Princípio de equivalência e de seguida o 2.º princípio de equivalência.

Ainda antes de propor a resolução tarefa 11, apresentei um vídeo onde dei a conhecer a regra prática na resolução de equações do tipo "$ax = b$". A maioria dos alunos recorreram à regra prática na resolução da tarefa 11, pelo que considero que compreenderam bem a sua aplicação. Revelaram facilidade nesta tarefa, no entanto, houve quem apresentasse algumas dificuldades na colocação de parêntesis aquando da aplicação da regra prática ($-3 + 5a = 12 \Leftrightarrow a = 12 + 3 \div 5$) o que levou a erros de cálculo.

Houve dificuldades que foram comuns às tarefas 10 e 11 e que já tinham surgido anteriormente tais como: incorreta redução de termos semelhantes, havendo erros ao nível dos cálculos; e incorreta aplicação da regra prática, adicionando um valor numérico a um membro e subtraindo o mesmo valor a outro membro. No entanto, erros como a incorreta divisão entre números inteiros negativos, trocar de membro sem trocar de sinal e não apresentação de sinais de equivalência e conjunto solução ocorreram, em muito menor número, pelo que considero que a 2.ª aula síncrona permitiu dissipar algumas destas dificuldades que tinham surgido anteriormente.

A última tarefa da aula consistia na resolução de um problema. Surgiram algumas resoluções distintas havendo também resoluções que não recorreram a equações. Nenhum aluno apresentou a equação inicial que coloquei no plano de aula, mas sim outras equivalentes. A equação que apresentei foi $125x + 200 = 700$ e os alunos apresentaram equações como: $125x = 700 - 200$; $x = \frac{700-200}{125}$; ou elaboraram cálculos sem recorrer a equações, por exemplo:

Valor da prestação: $700 - 200 = 500$

Número de meses: $\frac{500}{125} = 4\, meses$; ou 125+125+125+125=500, logo são necessário 4 meses.

Um aluno não recolheu corretamente os dados do problema e para descobrir o número de meses da prestação dividiu 700 por 125 não tendo em conta a entrada inicial que era abordada no enunciado do problema.

Apesar de muitos alunos não terem recorrido às equações, pareceu-me interessante a diversidade de resoluções que surgiram e, portanto, julgo que o problema estava adequado à turma.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 28 de abril de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 3.ª aula assíncrona, bem como resolver todas as tarefas propostas. É de salientar que as correções das resoluções dos alunos e o feedback do seu trabalho apenas foi disponibilizado após esta aula com o objetivo de que estes participassem neste momento de aula de forma mais espontânea e não se baseassem apenas no feedback que dei.

As participações dos alunos nesta aula foram bastante positivas visto que, dos 17 alunos da turma 16 participaram. Como as tarefas 10 e 11 eram compostas por 17 alíneas ao todo, tentei que cada aluno da turma resolvesse uma alínea. O aluno que não participou não respondeu à solicitação de participação que fiz.

Todos revelaram facilidade na resolução de equações, necessitando, um ou outro aluno de um pouco mais de questionamento de modo a apoiá-lo na resolução, questionamento como; “qual o objetivo na resolução de equações?”; “qual o primeiro princípio a aplicar?” etc. tentando sempre que a minha intervenção fosse em forma de questão e poucas vezes em forma de afirmação.

Mais uma vez, à medida que íamos passando pela resolução das várias equações aproveitava para salientar dificuldades comuns a alguns alunos e corrigi-las, tais como: apresentação de sinais de equivalência e conjunto solução; distinção entre equações onde é necessário recorrer ao 1.º Princípio de equivalência das equações onde se tem de recorrer ao 2.º Princípio de equivalência; quando surgiu $x = \frac{-9}{-3}$ evidenciar que a divisão entre dois números negativos é positiva; solicitar que lessem sempre muito bem os enunciados porque, por vezes, é pedida uma metodologia de resolução que eles têm de obedecer e que apenas podem optar pela sua metodologia preferencial quando nenhuma é pedida em específico.

Quando passámos à resolução do problema proposto na aula assíncrona salientei que muitos alunos não tinham recorrido à resolução de equações, mas que, agora é importante que o façam e que percebam como se faz, dado que é o objetivo do tema em estudo, neste momento.

Como apresento, na aula síncrona, um PowerPoint já pré elaborado com as resoluções, não há abertura para uma discussão de diversas resoluções que seria muito importante e interessante ao nível do raciocínio matemático, no entanto, não tenho os recursos necessários que me permitem escrever o que os alunos forem partilhando como seria possível em sala de aula com um quadro. Apesar disso, salientei que a resolução que apresentei é apenas um exemplo e que muitos apresentaram equações equivalentes que estavam igualmente corretas, indicando algumas que surgiram.

Pela participação ativa dos alunos na aula síncrona e por demonstrarem conhecimento dos conteúdos lecionados, julgo que a aula foi adequada e permitiu uma aprendizagem significativa aos alunos sobre este tema que, para alguns, não é intuitivo.

3.6.6 Aula de 28 de abril de 2020

A quarta aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 28 de abril de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 11). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 2 de maio de 2020.

O principal objetivo da aula foi consolidar os conhecimentos sobre a aplicação dos princípios de equivalência e regras práticas na resolução de equações, de modo a tornar mais intuitiva a sua utilização. Além disso, aprender a resolver equações do tipo $ax + b = cx + d$, cujo grau de complexidade é superior às equações que resolveram até então, visto que, surge pela primeira vez equações com mais do que um termo com incógnita e nos dois membros da equação. Um outro objetivo da aula foi a resolução de problemas, que acarreta um conjunto de passos que é necessário seguir e que foram sintetizados e apresentados aos alunos nesta aula.

A aula iniciou-se com um vídeo onde foi apresentado um exemplo de resolução de uma equação do tipo "$ax + b = cx + d$" e, logo de seguida, pedi que os alunos realizassem duas tarefas de resolução de equações deste tipo e das anteriormente aprendidas. O acréscimo de complexidade que este tipo de equações impõe não foi visível ao nível das resoluções dos alunos, isto porque, as dificuldades que surgiram prenderam-se com temas anteriores que nada tinham a ver com este tipo de equações em específico. Surgindo dificuldades aquando da troca de termos para um outro membro sem alteração de sinal, ou a incorreta utilização da regra prática, como por exemplo, $5y = 12 \Leftrightarrow y = 12 - 5$. Este último erro mencionado ocorreu na resolução de apenas um aluno.

As duas tarefas que foram propostas tinham cada uma 10 equações para resolver, ou seja, 20 ao todo, o que fez com que a resolução fosse demorada correndo o risco de desmotivar alguns alunos, talvez se repetisse a aula não escolheria duas tarefas com tantas alíneas, optaria apenas por uma ou por duas, mas com menos alíneas.

De seguida, propus uma atividade que tinha como objetivo introduzir a resolução de problemas envolvendo equações, isto porque, a tarefa era composta por quatro problemas com um grau de complexidade baixo e onde as equações que os representavam já eram dadas. A tarefa consistia na associação da equação ao problema, respetiva resolução e resposta. O objetivo da proposta desta tarefa era uma entrada mais suave no estudo mais formal da resolução de problemas, visto que, para alguns, são tarefas com um grau de complexidade bastante elevado. Os alunos revelaram facilidade na resolução desta tarefa, pelo que considero que estivesse adequada à turma. Após a tarefa introdutória ao tema da resolução de problemas envolvendo equações apresentei aos alunos um slide com os passos que devem ser seguidos na resolução de equações.

O final da aula prendeu-se com a resolução de dois problemas. Na resolução destas duas tarefas foi visível que alguns alunos não recorreram aos passos mencionados anteriormente, visto que, muitos não indicaram o que representa a incógnita ou não apresentaram resposta.

De facto, a resolução de problemas gerou muitas dificuldades aos alunos nomeadamente na interpretação do enunciado; na resolução com recurso a equações; na elaboração da equação que traduz o problema, talvez porque não refletem qual a incógnita necessária, o que esta representa e o que pede o problema, visto que, a maioria tenta escrever a equação sem definir a incógnita. Esta última dificuldade faz com que muitos alunos não recorram a equações para resolver o problema, inclusivamente um aluno chegou à resposta por tentativa erro. Além disso, surgem alguns raciocínios que parecem estar corretos, mas que, por falta de justificações claras e correta apresentação dos dados, não é percetível o pensamento do aluno. Se a aula fosse presencial, no momento de trabalho autónomo, ao aperceber-me deste tipo de resoluções recorreria ao questionamento, de modo a perceber o raciocínio do aluno e levá-lo a justificar oralmente e no papel.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

Algumas das tarefas que propus foram solicitadas no final de vídeos, este facto implicou que alguns alunos não se apercebessem das mesmas e não as tivessem realizado, posto isto, procurarei nestas aulas não colocar as tarefas a realizar dentro dos vídeos, mas sim em slides isolados de modo a que este facto não se repita.

No dia 5 de maio de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 4.ª aula assíncrona, bem como resolver todas as tarefas propostas. Tal como tem sido recorrente nas aulas síncronas, nesta aula, as participações foram bastante positivas. Dos 17 alunos da turma, 16 participaram. O aluno que não participou estava com problemas no microfone do seu computador que não o permitiu intervir.

Ao longo das resoluções fui salientando os aspetos que devem melhorar na generalidade, chamando à atenção dos erros mais comuns que surgem.

Na resolução dos problemas os alunos levantaram bastantes dúvidas revelando que não souberam resolver as tarefas. Aos alunos que intervieram desta forma, propus que resolvessem na aula síncrona com o meu apoio. Salientei a importância da indicação do que representa a incógnita e, de seguida, apoiei a elaboração da equação que representa o problema, sempre através de questões. Posteriormente, a resolução da equação não se revelou uma dificuldade, no entanto, a interpretação do resultado já não é tão intuitiva, pelo que, foi necessário questionamento sobre o que representa a incógnita novamente, de modo a recordá-los do contexto. Questionar se a solução da equação obtida é já resposta ao problema ou se ainda é necessário substituir esse valor em alguma expressão para daí retirar conclusões.

Posto isto, pelas resoluções dos alunos e pela sua participação nas aulas síncronas, julgo que a resolução de equações, para muitos, já não levanta grandes dificuldades, no entanto, na resolução de problemas ainda há um longo caminho a percorrer, de modo a fazer com que estes reflitam mais neste tipo de tarefas.

3.6.7 Aula de 5 de maio de 2020

A quinta aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 5 de maio de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 12). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 9 de maio de 2020.

O principal objetivo da aula foi dar a conhecer aos alunos estratégias de resolução de equações com parêntesis e reforçar o trabalho na resolução de problemas envolvendo equações lineares. Para cumprir o objetivo mencionado, apresentei um vídeo que corresponde a um recurso que foi selecionado da plataforma Escola Virtual, onde foi resolvida uma equação linear com parêntesis seguindo um conjunto de passos que abrangem a resolução de todo o tipo de equações lineares. Elaborei uma sistematização dessas passagens com cinco passos para resolver uma equação linear, que coloquei num slide.

A maioria dos alunos compreendeu bem a resolução de equações com parêntesis, no entanto, surgiram algumas dificuldades, nomeadamente, ao nível da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, principalmente devido aos sinais posicionais dos termos após a aplicação da propriedade.

Uma minoria revelou dificuldades na seguinte expressão, 2-(3-x) dizendo que a mesma seria igual à expressão 2(3-x), aplicando de seguida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No entanto, apesar das dificuldades mencionadas, bem como alguns erros de cálculo, ou falta do conjunto solução e sinais de equivalência que surgem em 1 ou 2 alunos julgo que, pelas resoluções apresentadas, tenham compreendido bem o conteúdo através dos materiais disponibilizados, pelo que considero que os mesmos tenham sido adequados aos objetivos.

Uma das tarefas que propus consistiu em verificar se um valor era ou não solução de três equações. Já tínhamos elaborado em aula um exercício semelhante, no entanto, os alunos revelaram não se lembrar dessa resolução, visto que, nenhum procedeu à substituição do x pelo valor pedido. Todos os alunos resolveram as equações para verificarem se a solução que encontravam coincidia ou não com o valor dado no enunciado. Posto isto, foi importante a seleção desta tarefa para poder chamar à atenção relativamente a este aspeto, referindo que a resolução da equação resolve o problema pedido, no entanto, pode ocupar muito mais tempo que não é necessário numa tarefa deste tipo cujo nível de dificuldade é relativamente baixo e que pode ser resolvida rapidamente. A chamada de atenção relativa a esta tarefa foi feita na aula síncrona, onde questionei se alguém se lembrava de uma tarefa semelhante que tínhamos elaborado, ao qual alguns alunos responderam positivamente.

Propus ainda a resolução de uma equação com uma especificidade, a solução da mesma deveria ser apresentada em numeral misto. Julgo que seja importante que uma tarefa envolva vários tópicos da Matemática e, para além disso, permitir a revisão de conteúdos de anos anteriores. Foi com esse intuito que selecionei esta tarefa à qual os alunos responderam positivamente, revelando, a maioria, recordar-se da passagem de fração para numeral misto. No entanto, um aluno revelou, na aula síncrona, não se recordar de como se fazer a passagem, pelo que, houve espaço na aula para recordar este conteúdo que considero ter sido importante ser abordado.

Por fim, a Ficha de trabalho n.º 2 (Anexo 3) incluía dois problemas, o primeiro, semelhante ao que havíamos estado a trabalhar em aulas anteriores, onde era necessário escrever a equação que traduz o problema, resolvê-la, tirar conclusões e responder.

Problema este, que mais uma vez gerou algumas dificuldades e que não foi acessível a todos, visto que, alguns alunos não conseguiram chegar à correta elaboração da equação, ou não retiraram as conclusões corretas dos resultados obtidos.

A segunda tarefa da ficha de trabalho consistia na apresentação de 4 resoluções de equações que incluíam alguns erros, e que os alunos deveriam selecionar os erros e justificar o porquê de o serem. Selecionei esta tarefa por considerá-la muito interessante do ponto de vista das justificações, no entanto, algumas delas foram demasiado diretas e sucintas, por vezes, incompletas.

Julgo que esta tarefa seria bastante interessante de se trabalhar em sala de aula, discutindo com os alunos de modo a promover justificações mais completas, no entanto, a resolução desta sem apoio e questionamento por parte do professor, faz com que alguns alunos não se esforcem muito nas justificações. Apesar disso, a tarefa foi bem conseguida pela maioria dos alunos e estes apresentaram justificações válidas.

Um aspeto bastante interessante foi perceber o confronto com resoluções distintas das que os alunos estão habituados a realizar, visto que, numa das resoluções, um dos passos consistia na troca de sinais de todos os termos da equação, através da multiplicação por -1 em ambos os membros da equação. Como alguns alunos nunca se tinham confrontado com tal possibilidade consideraram este procedimento como um erro, o que foi interessante ser discutido na aula síncrona.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 12 de maio de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 5.ª aula assíncrona, bem como resolver todas as tarefas propostas. Dos 17 alunos da turma 15 participaram na aula resolvendo as tarefas propostas. Tendo sido uma aula bastante dinâmica onde os alunos colocaram bastantes dúvidas.

Foram salientados alguns erros que foram cometidos, tais como: chamada de atenção aquando da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, salientando os sinais posicionais que persistiam após a sua aplicação; e erro na expressão 2-(3-x) que alguns alunos consideram igual à expressão 2(3-x), salientado que o número que está a multiplicar pelos parêntesis é -1 e não o 2.

Na resolução da ficha de trabalho os alunos esclareceram bastantes dúvidas, visto ser o tipo de tarefa que levanta mais dificuldades. As dúvidas prendiam-se com a elaboração da equação que traduz o problema, ou sobre as conclusões a retirar após finalizar a resolução da equação.

Na resolução da última tarefa da ficha de trabalho, aquando do aparecimento do passo onde todos os sinais dos termos da equação foram alterados, questionei à turma se se tinha feito algo de errado ou se o passo era válido. A resposta à minha questão foi controversa, havendo alunos que compreendiam e outros que não, no entanto, um aluno que compreendeu o passo justificou corretamente o porquê de a passagem ser válida através da aplicação do princípio de equivalência da multiplicação.

Apesar das condicionantes que envolvem as aulas à distância, julgo que a metodologia de os alunos resolverem as tarefas individualmente, e haver posteriormente, a possibilidade de as corrigir, retirar dúvidas e ainda haver alguma discussão em volta de alguns temas aquando das aulas síncronas, combate um pouco dessas condicionantes que se prendem com a falta de discussões coletivas presenciais, falta de apoio do professor ao aluno aquando do trabalho autónomo, pouco confronto com resoluções distintas etc. Além disso, a atitude dos alunos nas aulas síncronas é bastante positiva, sempre dispostos a participar e a questionar quando sentem necessidade de o fazer.

Um aspeto a salientar e que é motivo de reflexão é que alguns alunos que eram menos participativos nas aulas presenciais, tornaram-se muito mais ativos nestas aulas à distância, e o contrário também se verificou, alunos mais participativos nas aulas presenciais intervieram menos nestas condições.

Concluindo, com base na atitude dos alunos na aula síncrona e nas resoluções apresentadas, considero que a aula tenha sido adequada à turma possibilitando a aquisição de aprendizagens significativas.

3.6.8 Aula de 12 de maio de 2020

A sexta aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 12 de maio de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 13). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 13 de maio de 2020.

A aula iniciou-se com a apresentação de três problemas em vídeo. As equações que traduziam cada um dos problemas eram de diferentes tipos que no final de cada vídeo foram descritos. Após o término dos três vídeos com os problemas, apresentei um slide com a sistematização sobre a classificação de equações lineares.

Caso a aula fosse presencial, a estratégia seria os alunos resolverem cada um dos problemas que propus e no final haver uma discussão coletiva onde abordaria a classificação de equações lineares e faria igualmente a sistematização. Como a discussão no final do trabalho autónomo de cada tarefa não é possível nas aulas à distância decidi manter os problemas, mas resolvê-los em vídeo e retirar as conclusões.

De seguida, propus tarefas do manual para os alunos porem em prática a classificação de equações. Uma das tarefas consistia na resolução e respetiva classificação de equações lineares, as restantes tarefas correspondiam a problemas cujas equações tinham classificações distintas.

As principais dificuldades que emergiram prenderam-se com o conjunto solução de algumas equações ou com a classificação de equações que tinham o valor zero como solução. Na equação $0x = 0$ alguns consideraram o conjunto solução como sendo $S = \{0\}$. Houve quem apresentasse o conjunto solução da equação impossível como $S = \{\emptyset\}$. Relativamente à classificação de equações, alguns consideraram a equação $7x = 0$ como sendo uma equação impossível ou chegaram à solução $x = 0$ e classificaram como equação possível e indeterminada.

Foi expectável algumas dificuldades quando surge a solução zero ou quando, eventualmente, o zero surge na equação. Na aula síncrona foram discutidas as soluções das equações com estas características. Procurei esclarecer as dúvidas que emergiram nas resoluções apresentadas e que mencionei anteriormente.

Na resolução de problemas surgiram novamente algumas dificuldades que já tinham emergido anteriormente, no entanto, estas verificaram-se em menor número. As dificuldades prenderam-se com a não definição da incógnita, escrita incorreta da equação que traduz os problemas e não dar resposta ao problema. Outra dificuldade que emergiu num aluno consistiu em concluir que a equação que traduz o problema é impossível porque a solução encontrada é negativa. Esta conclusão é interessante porque o aluno apercebe-se que o valor encontrado não é válido no problema, no entanto, não justifica corretamente o porquê de não o ser, dizendo que é a equação que é impossível, o que não corresponde à realidade.

A última dificuldade mencionada pode ser resultado de um dos passos da resolução de problemas que salientei que é necessário ser tido em conta que é a verificação da solução no contexto do problema. Ou seja, a equação que traduz o problema é uma equação possível e determinada, no entanto, a solução dela resultante pode não ser válida para o problema, como é o caso dos valores negativos quando estamos a falar em número de livros. Posto isto, foi necessário chamar à atenção dos alunos que a equação pode ser possível e o problema ser impossível, mas este ser impossível não implica que a equação também o seja.

Todas as resoluções dos alunos foram por mim corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 15 de maio de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 6.ª aula assíncrona, bem como resolver todas as tarefas propostas.

A participação dos alunos nesta aula não foi tão ativa como em aulas anteriores, visto que, por um lado, as tarefas desta aula eram compostas por menos alíneas havendo menos oportunidade de participação e, por outro, havia mais problemas a resolver, tarefas que, pelo seu nível de dificuldade, nem todos os alunos se sentem à vontade para se voluntariar a participar. Dos 17 alunos da turma, apenas 9 participaram.

Apesar de se ter registado um menor nível de participação, esta aula foi bastante interessante no sentido de chamar à atenção dos alunos relativamente a diversos aspetos em que revelaram ter dificuldades aquando da resolução das atividades propostas na aula assíncrona. Esclareci a classificação de equações onde revelaram mais dificuldades e salientei novamente que o conjunto solução da equação impossível se representa com chavetas vazias ou com o símbolo do conjunto vazio e nunca com os dois em simultâneo.

Concluindo, apesar dos conteúdos não terem ficado completamente claros aquando da aula assíncrona, ao verificar as dificuldades que emergiram nas resoluções realizadas pelos alunos, foi possível chamar à atenção desses aspetos de modo a esclarecer as dúvidas que surgiram. Pelo facto de haver dois momentos de aula destinados ao mesmo tema e às mesmas tarefas, e de eu ter possibilidade de analisar as resoluções onde verifico se os alunos compreenderam ou não os conteúdos antes da aula síncrona, é possível dissipar, no segundo momento da aula, as dificuldades que surgem no primeiro. Posto isto, mais uma vez, considero que a metodologia escolhida é bastante favorável a uma boa aprendizagem dos conteúdos por parte dos alunos.

3.6.9 Aula de 15 de maio de 2020

A sétima aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 15 de maio de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 14). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 17 de maio de 2020.

A aula iniciou-se com a apresentação de um vídeo com a resolução de uma equação com denominadores. Para a resolução de uma equação deste tipo elaborei duas possíveis estratégias a seguir, de modo a mostrar aos alunos que existem diversas formas de resolver uma mesma equação, não havendo uma forma prescrita.

No trabalho desenvolvido posteriormente, os alunos revelaram ter compreendido os conteúdos uma vez que, tiveram sucesso na resolução das várias tarefas propostas. No entanto, surgiram algumas dificuldades como, por exemplo, eliminar os denominadores sem que todos os termos da equação tivessem o mesmo denominador.

Uma dificuldade que emergiu e que, aquando da planificação da aula não me ocorreu, foi a eliminação dos denominadores quando imediatamente atrás do traço de fração aparece o sinal de “menos” que afeta os sinais dos termos do numerador. É uma dificuldade comum e que deveria ter tido atenção, nomeadamente, na seleção do exemplo a apresentar em vídeo, onde poderia ocorrer tal situação de modo a chamar à atenção. Como esse assunto não foi abordado, muitos alunos erraram nessa passagem que foi depois por mim salientada e discutida na aula síncrona.

Posteriormente ao trabalho com equações com denominadores, foi o momento de introduzir o tipo de equações com o nível de complexidade mais elevado deste ano letivo: as equações com denominadores e parêntesis. Mais uma vez o recurso utilizado foi um vídeo, onde apresentei a resolução de uma equação deste tipo, salientando, que tal como têm aprendido, quando existem parêntesis, o primeiro passo é desembaraçá-los chegando, posteriormente, a uma equação com denominadores.

Este tipo de equações trouxe consigo duas novas dificuldades. A primeira prende-se com a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição que gera sempre alguns problemas aos alunos. A segunda, prende-se com os alunos que optaram por reduzir primeiro os termos da equação ao mesmo denominador e só depois desembaraçar de parêntesis, o que provocou alguns erros de cálculo que seriam minimizados caso tivessem optado por seguir a ordem que aconselhei no vídeo.

A segunda dificuldade mencionada revela que alguns alunos resistem em seguir as indicações do professor, tentando apresentar resoluções distintas. Foi necessário, na aula assíncrona, explicar aos alunos que a ordem que lhes foi apresentada tem o propósito de facilitar os cálculos e minimizar os erros. Salientei que fazer da forma distinta da que foi apresentada no vídeo está correta e é igualmente válida, no entanto, existe maior risco de errar nos cálculos.

Na resolução de problemas foi notória a melhoria da turma. Grande parte dos alunos conseguiu resolver com sucesso os problemas propostos apresentando todos os dados necessários e a respetiva resposta. Julgo que a introdução, desde cedo, de tarefas deste tipo permitiu aos alunos melhorarem a sua performance, tarefas estas que implicam mais concentração e mais tempo dos alunos na sua resolução. Como tal, o recurso a tarefas com nível de dificuldade mais elevado desde cedo, será uma estratégia que irei adotar futuramente na minha atividade profissional de modo a melhorar o envolvimento e performance dos alunos neste tipo de tarefas.

Nesta aula propus bastantes tarefas pelo que foram necessárias duas aulas síncronas para conseguir passar por todas as tarefas propostas. O facto de a aula ter tantas tarefas poderia provocar nos alunos algum cansaço que provocaria menos atenção e menos rigor na resolução das últimas tarefas, no entanto, tal não foi percetível nas resoluções apresentadas.

Ao elaborar a aula e ao propor as tarefas, não me apercebi que esta tinha ficado tão longa, pelo que, caso repetisse a aula, encurtá-la-ia, reduzindo o número de tarefas a realizar. Uma das tarefas a retirar seria a tarefa 35 do manual, por considerar que, com a apresentação do vídeo a anteceder esta tarefa, o papel da mesma não seria tão essencial. Esta tarefa tem como objetivo introduzir a resolução de equações com denominadores. Caso a aula fosse presencial, esta poderia ser proposta e haveria posteriormente uma discussão onde seriam apresentadas as alternativas de resolução que abordei no vídeo, no entanto, como a introdução já tinha sido feita pelo mesmo esta poderia ser dispensada.

Outra tarefa que dispensaria, seria um dos problemas que propus. Foram pedidos três problemas, no entanto, o problema 88 tinha alguns aspetos que criaram confusão aos alunos, nomeadamente na frase "(…) gastou metade do dinheiro que tinha num sumo e dois terços do restante numa sandes de queijo;(…)", implicando que alguns alunos não percebessem que parte do dinheiro foi gasto na sandes de queijo. Como a restante resolução era semelhante aos problemas anteriores, esta seria uma tarefa que não incluiria caso repetisse a aula.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 19 de maio de 2020 e 22 de maio de 2020 ocorreram as aulas síncronas que tinham como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 7.ª aula assíncrona, bem como resolver todas as tarefas propostas.

Como já tinha referido, foram necessárias duas aulas síncronas para a resolução de todas as tarefas da aula assíncrona, algo que não estava planeado ocorrer. Portanto, na primeira aula síncrona foram realizadas as tarefas até à 38 da página 40 do manual, ficando todos os problemas para resolver na aula síncrona seguinte.

Houve alunos a repetir a participação em ambas aulas síncronas, no entanto, fazendo a junção de ambas, dos 17 alunos da turma, 13 participaram.

Estas aulas têm como objetivo dissipar algumas dificuldades dos alunos e esclarecer dúvidas, como tal, aproveitei para salientar os aspetos onde revelaram dificuldades, nomeadamente: chamar à atenção que apenas é possível retirar os denominadores quando todos os termos da equação têm o mesmo denominador, procurando questionar diversas vezes aos alunos a participar o porquê de se poder retirar os denominadores; salientar que o sinal de "menos" atrás do traço de fração altera todos os sinais dos termos do numerador, colmatando a lacuna que tinha ocorrido na aula assíncrona onde não abordei o tema; e a importância de seguir a ordem de primeiro desembaraçar os parêntesis e só depois reduzir ao mesmo denominador, salientando que a ordem inversa é possível e é válida, no entanto, por vezes, pode causar situações que conduzam a algum erro de cálculo que pode ser evitado seguindo a ordem contrária.

Abordei esta situação do sinal de "menos" atrás do traço de fração referindo-me a ela como "rasteira". Em tom de brincadeira questionava a turma "será que o aluno x vai cair na rasteira?"; "o aluno x caiu na rasteira?" de modo a que estes quando se deparassem com a situação, se lembrassem do que tínhamos falado na aula síncrona porque julgo que quando algo é abordado desta forma os alunos têm outro nível de atenção que é menor quando o tom é mais sério.

Mais uma vez, esta metodologia de trabalho, permitiu dissipar uma dificuldade que eu não tinha ponderado aquando da planificação das aulas mas que, ao emergir nas resoluções dos alunos, me possibilitou abordar na aula síncrona.

Apesar da aula ponderada ter sido bastante longa e, como já referi, a encurtaria caso a repetisse, julgo que a mesma foi adequada à turma, de modo a possibilitar que os alunos ficassem a compreender a resolução de todo o tipo de equações lineares.

3.6.10 Aula de 19 de maio de 2020

A oitava aula assíncrona da unidade didática, realizada com o suporte da plataforma Escola Virtual (https://www.escolavirtual.pt/), teve início no dia 19 de maio de 2020, através da partilha online de recursos com os alunos e a solicitação da realização de um conjunto de tarefas (Anexo 15). Os alunos enviaram as suas resoluções das tarefas matemáticas ali propostas para a professora cooperante, até ao dia 23 de maio de 2020.

O objetivo da aula foi consolidar os conhecimentos dos alunos sobre resolução de equações e problemas envolvendo equações. Para tal, propus algumas tarefas do manual: duas tarefas de resolução de equações envolvendo denominadores e parêntesis e três problemas. Por fim, propus a resolução de uma ficha de trabalho composta por dois problemas.

Julgo que tenha sido importante esta aula de consolidação de conhecimentos, de modo a permitir aos alunos detetarem possíveis dúvidas que permaneçam tendo, assim, oportunidade de as esclarecer.

As dificuldades que emergiram foram semelhantes às das aulas anteriores, nomeadamente: retirar o denominador quando atrás do traço de fração está um sinal de “menos”; reduzir os termos da equação ao mesmo denominador antes de desembaraçar de parêntesis levando a alguns erros de cálculo; aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; retirar denominadores sem que todos os termos tivessem o mesmo denominador; trocar um valor de membro mas não trocar o sinal; operações entre termos não semelhantes e; não definir a incógnita ou não apresentar a resposta a um problema. Todas estas dificuldades persistiram ao longo da unidade didática, no entanto, foi notória a diminuição do número de alunos que as evidenciavam.

Uma das condicionantes das aulas à distância é o facto de, nas condições em que nos encontramos, ser mais difícil de ajudar os alunos que habitualmente precisam de mais apoio e de ser chamados à atenção para se manter no foco. De facto, para que o aluno aprenda a resolver equações, é necessário, por parte deste, empenho, visualizar os vídeos, resolver as tarefas e colocar dúvidas.

Alguns alunos, para se manterem empenhados e motivados, necessitariam de algum incentivo e apoio por parte do professor, bem como resolver tarefas ainda mais desafiadoras e interessantes que ficam mais limitadas nesta interação virtual. Um exemplo foi uma tarefa que eu tinha ponderado elaborar cujo nome seria “tarefa da magia”, onde eu iria realizar uma “magia” em sala de aula com cartas, adivinhando o número que o aluno pensou, com recurso às equações, cujo desafio seria os alunos descobrirem como se realiza a tal “magia”. Uma tarefa deste género em sala de aula, julgo que iria suscitar interesse nos alunos, mas que, nestas condições não foi possível realizar, por falta de tempo nas aulas síncronas.

Também as discussões coletivas são momentos muito importantes, visto que, posso incentivar à participação de alunos que habitualmente são mais distraídos em sala de aula. Embora, nas aulas síncronas, também incentive à participação de alunos com mais dificuldades na disciplina e que habitualmente se voluntariem menos, no momento da resolução das tarefas na aula assíncrona, esse apoio já não é possível.

Todas as resoluções dos alunos foram corrigidas e elaborei, ainda, para cada um deles, um pequeno comentário escrito onde incentivei o aluno a rever alguns aspetos que se revelaram menos compreendidos ou elogiei o trabalho realizado.

No dia 26 de maio de 2020 ocorreu a aula síncrona que tinha como objetivo esclarecer dúvidas relativas à 8.ª aula assíncrona, bem como resolver todas as tarefas propostas e dissipar todas as dificuldades relativas à unidade didática que havíamos estado a trabalhar. A participação na aula foi, mais uma vez, positiva, visto que dos 17 alunos da turma, 11 participaram resolvendo as várias tarefas propostas.

Como foi habitual ao longo de todas as aulas síncronas, à medida que íamos passando pelas resoluções das várias tarefas, ia chamando à atenção dos aspetos que geraram dificuldades, aspetos esses que já mencionei acima.

Uma preocupação que tive foi insistir em perguntar, no fim de cada resolução, se persistia alguma dúvida. O objetivo desta aula foi dissipar todas as dificuldades que ainda emergissem, salientando que estava a acabar a unidade. A unidade de Equações do 1.º grau é bastante importante para a compreensão de conteúdos dos seguintes anos de escolaridade, pelo que, é de extrema importância que este tema fique totalmente claro para cada aluno.

Em termos gerais, considero que os alunos adquiriram aprendizagens significativas com os materiais disponibilizados, pela evolução evidente nas suas resoluções e pela sua participação ativa nas aulas síncronas.

Capítulo 4 Métodos e procedimentos de recolha e análise de dados

Este capítulo é relativo aos métodos e procedimentos de recolha e análise de dados a que recorri na minha investigação. Inicio o capítulo (secção 4.1) com as opções metodológicas para a recolha de dados com base em literatura de referência, onde indico a natureza da minha investigação. De seguida, apresento os métodos e respetivos instrumentos de recolha de dados (secção 4.2) que utilizei aquando da intervenção para recolha de material para a investigação. Elaboro, ainda, uma breve apresentação dos participantes do estudo (secção 4.3). Na secção 4.4, indico o modo como tratei e analisei os dados recolhidos, explicitando as estratégias de seleção de dados, bem como, os autores em que me baseei para a análise a realizar. Por fim, apresento as questões de ética (secção 4.5) que foram tidas em conta ao longo da investigação.

4.1 Opções metodológicas para a recolha de dados

Todo o professor necessita de se questionar sobre as opções didáticas tomadas, sobre os manuais disponibilizados, sobre as orientações curriculares vigentes e, neste sentido, é muito importante ter, por vezes, um papel de professor-investigador, investigando assim sobre a sua própria prática (Ponte, 2002). Neste sentido, todo o bom professor, necessita de desempenhar, por vezes, o papel de investigador.

Investigar sobre a própria prática é fundamental para conhecê-la melhor, detetar falhas e melhorar (Ponte, 2002). É um processo muito enriquecedor para o trabalho do professor, permitindo mostrar a outros professores e à comunidade científica as aprendizagens visadas pelo estudo. O RPES é então uma investigação sobre a minha prática na lecionação de Equações do 1.º grau numa turma do 7.º ano de escolaridade.

A investigação sobre a própria prática implica, ainda, a reflexão sobre a própria prática (Ponte, 2002). A reflexão sobre a prática está bastante presente no RPES, na medida em que, aquando do término de cada aula, refleti nos aspetos bons e menos bons que ocorreram de modo a tornar a seguinte aula melhor que a anterior.

A natureza desta investigação é qualitativa, na medida em que se enquadra nas características descritas por Bogdan e Biklen (1994), como sendo uma investigação cuja fonte é o ambiente natural, onde o investigador é o instrumento principal na recolha dos dados. Trata-se de uma investigação descritiva, em que o processo é de maior interesse do que os resultados e caracteriza-se também por uma análise indutiva dos dados, ou seja, retirando conclusões após análise de dados e não para confirmar teses.

4.2 Métodos e recolha de dados

Para a investigação sobre a problemática escolhida recorri à observação e à recolha documental que, segundo Ponte (2002), são duas das técnicas de recolha de dados mais usuais numa investigação de natureza qualitativa.

A observação é um método muito importante e ocorre inevitavelmente durante a lecionação presencial, na medida em que o professor está em constante observação das ações e contribuições dos seus alunos. A natureza desta observação foi participante moderada que se caracteriza pelo investigador como participante da investigação. Segundo Mónico et al. (2017), esta metodologia permite ao investigador apreender, compreender e intervir nos contextos em que se move.

De acordo com o planeamento inicial, que considerava as aulas a serem realizadas presencialmente, o foco da observação foram os momentos de trabalho autónomo de díades ou tríades de alunos, de modo a compreender a interação entre eles, as justificações que surgem aquando da interação e discussão sobre a tarefa, percebendo que dificuldades emergem ao nível dos conhecimentos matemáticos e também, das justificações matemáticas. Além do foco no trabalho autónomo, outro momento da aula alvo da minha atenção foram os momentos de discussão coletiva. Na discussão coletiva a observação é muito importante e é um momento interessante do ponto de vista investigativo, na medida em que o processo do raciocínio matemático a ser estudado, a justificação, está, nesta fase da aula, muito presente.

Para apoiar a observação nas aulas presenciais, utilizei a gravação vídeo (recorrendo a uma câmara de filmar) nas aulas lecionadas presencialmente, e de gravações áudio (recorrendo a gravadores) de dois grupos de trabalho. O objetivo da gravação áudio dos dois grupos de trabalho aquando da realização de tarefas seria perceber o modo como os alunos trabalham, como se envolvem, como pensam, que reflexões sobre as tarefas fazem, as justificações matemáticas que dão e as dificuldades que emergem.

Outro objetivo da gravação áudio dos grupos de trabalho selecionados seria perceber as evoluções que pudessem surgir na apresentação de justificações matemáticas por parte dos alunos, no entanto, como somente houve duas aulas presenciais, apenas nessas aulas foi possível esta gravação, pelo que, a análise desta evolução não foi possível.

Inicialmente estava previsto que a observação tivesse um papel essencial na recolha de dados. Porém, como apenas duas aulas foram lecionadas presencialmente tendo as restantes sido lecionadas à distância, este método de recolha de dados não foi muito requisitado. Tanto a gravação áudio como a gravação vídeo não me permitiram recolher muita informação, visto que, as mesmas apenas foram efetuadas nas duas primeiras aulas da intervenção, não sendo possível seguir a evolução dos alunos selecionados ao nível das justificações.

Nas aulas lecionadas à distância, os momentos de interação professor-alunos ocorreram nas aulas síncronas, onde eram discutidas coletivamente as tarefas propostas na aula assíncrona anterior. Nestas aulas não era possível a observação, no entanto, fui registando as justificações dadas oralmente pelos alunos.

Após a conclusão de cada aula, presencial ou à distância, elaborei alguns registos, no meu computador, de aspetos importantes da mesma de modo a não me esquecer deles na minha investigação. A estes registos designa-se notas de campo, que segundo Mónico et al. (2017) é uma ferramenta importante na observação participante.

O principal método de recolha de dados utilizado, foi a recolha documental, principalmente a recolha de resoluções dos alunos das várias tarefas propostas. Essa recolha foi realizada tanto nas aulas presenciais como nas aulas lecionadas à distância.

De modo a que as produções recolhidas fossem o mais fidedignas possível, nas aulas presenciais, pedi aos alunos que resolvessem a tarefa numa folha à parte e que, aquando da discussão coletiva, registassem as correções que pretendiam realizar no seu caderno diário, de modo a poder recolher e analisar a resolução realizada pelo aluno na folha sem que este tivesse feito alterações durante a discussão coletiva.

Nas aulas à distância, os alunos partilhavam comigo as suas resoluções das várias tarefas antes das aulas síncronas onde essas mesmas tarefas eram discutidas. As resoluções dos alunos foram alvo de correção e feedback da minha parte, no entanto, as mesmas apenas eram partilhadas com os alunos após a aula síncrona, pelo que as ideias expostas na aula não tinham qualquer influência das correções por mim efetuadas, tornando a partilha de ideias mais fidedigna.

Pelo facto de a maioria das aulas da intervenção terem sido lecionadas à distância, não havendo a possibilidade de recurso à observação, a recolha documental revelou-se essencial para me permitir ter acesso às suas estratégias e justificações matemáticas. Assim, nas aulas assíncronas, propus tarefas aos alunos que estes resolviam no seu caderno, tiravam fotografias e, posteriormente reuniam num ficheiro Word, que partilhavam comigo, ficando com a posse de todas as produções efetuadas pelos mesmos nas aulas à distância.

As resoluções dos alunos são um instrumento muito importante para compreender o contributo que a tarefa teve para a aprendizagem dos alunos e ter acesso às suas estratégias, nesse sentido, foi imprescindível a recolha das mesmas para uma posterior análise detalhada das suas justificações matemáticas de modo a poder caracterizá-las.

Para além da recolha das produções dos alunos nas tarefas por mim propostas, recolhi também as resoluções do teste de avaliação sumativa (Anexo 5).

4.3 Participantes do estudo

Sendo esta uma investigação de natureza qualitativa, caracteriza-se, entre outras coisas, por ser uma investigação descritiva (Bogdan & Biklen, 1994) e que implica uma interação com os atores sociais (Sarmento, 2011). Sendo assim, os participantes do estudo assumem um papel bastante importante, no sentido de recolher informação pertinente e diversificada melhorando desta forma, o estudo a realizar.

Nas duas primeiras aulas, lecionadas presencialmente, procedi à gravação áudio de duas díades para recolha de dados aquando de discussões de tarefas entre os mesmos. As díades foram escolhidas segundo os seguintes critérios: recorrente partilha de ideias entre o par aquando da resolução de tarefas e suscetibilidade para apresentar justificações elaboradas completas ou não. Porém, e como já referi anteriormente, as gravações efetuadas não me permitiram a recolha de informação relevante para o relatório, visto apenas terem sido realizadas nas duas primeiras aulas. Assim, as produções realizadas pelos alunos tiveram um papel essencial na recolha de dados para o estudo.

Tendo em conta o objetivo do estudo, optei por analisar as produções realizadas por toda a turma, com o intuito de ter uma perspetiva global da mesma. Uma vez que se trata de uma turma bastante heterogénea, pelo que é assim possível obter uma diversidade de resoluções das tarefas, justificações matemáticas e representações, o que é bastante pertinente tendo em conta os objetivos do estudo estabelecidos.

Foram, portanto, considerados os 17 alunos da turma, como participantes do estudo. É de referir que para algumas tarefas não apresento 17 resoluções, isto porque, nas aulas presenciais os alunos realizaram as tarefas em díades ou tríades, e nas aulas à distância, nem todos os alunos entregaram a resolução das tarefas atempadamente, ou simplesmente, não responderam à questão em análise.

4.4 Análise de dados

Com a análise de dados realizada pretende-se responder às questões do estudo apresentadas na Introdução deste RPES, pelo que é essencial organizar os dados de modo a permitir uma correta análise dos mesmos e posterior conclusão.

A organização escolhida foi por tipologia de tarefa. Ou seja, as resoluções dos alunos foram organizadas pela tipologia de tarefa a que se referem, nomeadamente, tarefas exploratórias que visam a generalização, resolução de equações e resolução de problemas envolvendo equações.

A organização dos dados prende-se com a comparação que pretendo realizar enquanto analiso as justificações matemáticas que emergem. Pretendo contrastar justificações matemáticas presentes em resoluções que diferem na complexidade de justificações e nas representações que apresentam, evidenciar os tipos de justificações que mais surgem por tipologia de tarefa e as dificuldades associadas a este processo do raciocínio matemático, evidenciadas pelos alunos.

A opção pela análise por tipologia de tarefa prende-se com o facto de, caso a comparação feita fosse, por exemplo, relativa a uma justificação matemática presente na resolução de uma tarefa exploratória com uma justificação matemática presente num exercício, esta não teria em conta a especificidade da atividade requerida ao aluno e que pode influenciar o tipo de justificação que lhe é solicitada.

De seguida, selecionei as tarefas alvo dessa mesma análise. A seleção foi feita segundo alguns critérios: o primeiro, tendo em conta a sua tipologia, de seguida, a seleção prendeu-se com a tipologia de justificação matemática presente em cada tarefa, ou seja, procurei selecionar tarefas que suscitem justificações mais elaboradas, e, ainda, à diversidade de resoluções dos alunos, bem como os níveis de justificação que surgiam em cada uma delas.

Para analisar os níveis de complexidade e as representações que surgem nas justificações dos alunos relativas a tarefas exploratórias que visam a generalização, optei pelas questões 1.2 e 2.4 da ficha de trabalho "Expressões algébricas" (Anexo 1) (trabalhada nas duas primeiras aulas da intervenção, dias 2 e 4 de março de 2020). A escolha destas tarefas prendeu-se com o facto de as mesmas possuírem características distintas tais como: requerer uma justificação mais elaborada para justificar o termo geral de uma sucessão; e justificação onde não é necessário recorrer a cálculos podendo justificar com recurso a linguagem natural e com base no que é dito no enunciado do problema, respetivamente.

Relativamente a tarefas sobre equações, analisei a questão 1.3 da ficha de trabalho n.º 1 (Anexo 2) (partilhada no dia 21 de abril de 2020, ou seja, na 4.ª aula da intervenção), as questões a) e c) da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 2 (Anexo 3) (partilhada no dia 5 de maio de 2020, ou seja, na 8.ª aula da intervenção) e, por fim, a questão 35.2 a) da página 37 do manual (Passos & Correia, 2019) (Proposta no dia 15 de maio de 2020, ou seja, na 10.ª aula da intervenção). Apenas a questão 1.3 difere das demais, porque requer uma justificação sobre a verificação da equivalência entre três equações apresentadas.

Relativamente às restantes questões selecionadas para análise, estas prendem-se com a análise de resoluções de equações. Na tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 2 é necessário compreender se a resolução está correta e se não está, indicar o erro e justificar e na questão 35.2 da página 37 do manual é necessário explicar cada passo de uma resolução já efetuada. Estas questões foram selecionadas porque os alunos podem fazer uma análise focada na resolução dada, evocando os valores da mesma como "passa o -1 do primeiro para o segundo membro e troca o sinal", como fazer uma análise de forma geral independente da equação dada como "aplica as regras práticas", o que implica o recurso a justificações com níveis de complexidade distintos, algo que é interessante de analisar.

Para a análise das justificações matemáticas presentes em tarefas de resolução de problemas envolvendo equações, optei pela análise tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção (partilhada no dia 12 de maio de 2020), tarefa 87 da página 51 do manual (Passos & Correia, 2019) proposta na 10.ª aula da intervenção (partilhada no dia 15 de maio de 2020) e a tarefa 105 da página 54 do manual (Passos & Correia, 2019) proposta na 11.ª e última aula da intervenção (partilhada no dia 19 de maio de 2020).

Elaborei um quadro de análise com os critérios de classificação por níveis de complexidade das justificações matemáticas dos alunos (Tabela 11) a partir do quadro apresentado por Mata-Pereira e Ponte (2018) de modo a ir ao encontro do objetivo do presente estudo. Foi necessário proceder a algumas adaptações da tabela elaborada pelos autores devido às especificidades das tarefas matemáticas trabalhadas. As adaptações elaboradas foi a não consideração da formalidade das justificações apresentadas pelos alunos.

Tabela 11: Critérios de classificação de justificação por nível de complexidade.

Nível de complexidade 0	- Apresenta uma afirmação que não é uma justificação.
Nível de complexidade 1	- Apoia-se numa afirmação de outra pessoa ou em materiais de referência como o manual escolar. - Considera apenas a estrutura do argumento e não atende ao seu conteúdo. - Apoia-se em procedimentos simbólicos, mas sem atribuição de significado à manipulação simbólica ou aos símbolos matemáticos ou sem estabelecer relação com uma situação específica.
Nível de complexidade 2	- Apoia-se em exemplos, ou seja, em casos particulares da situação.
Nível de complexidade 3A	- Recorre à coerência lógica.
Nível de complexidade 3B	- Recorre a exemplos genéricos, ou seja, através de operações ou transformações de um objeto que se considera como representativo de uma classe de objetos. - Foca-se em aspetos gerais de uma situação particular, podendo envolver, em simultâneo, outro processo do raciocínio como a generalização.
Nível de complexidade 3C	- Apoia-se em propriedades ou procedimentos matemáticos, definições, hipóteses e teoremas.

Considerei ainda um critério adicional para distinguir uma justificação de nível de complexidade 3B de 3C: as justificações com nível de complexidade 3C distinguem-se das justificações com nível de complexidade 3B também pelo facto de o aluno, no primeiro caso, mencionar explicitamente a propriedade ou procedimento matemático ao qual recorre, enquanto que no nível de complexidade 3B pode usá-los mas sem lhes aludir de forma direta.

Além de caracterizar as justificações matemáticas dos alunos por nível de complexidade, categorizei ainda as representações às quais os alunos recorreram baseando-me no quadro das categorias de análise referente aos tipos de representação (Tabela 1) elaborado por Mestre (2014).

Nas aulas lecionadas presencialmente, a metodologia de trabalho escolhida foi o trabalho a pares, no entanto, para a análise dos dados optei por analisar as produções dos alunos individualmente, isto porque, apesar de os alunos discutirem em conjunto as tarefas, existem sempre nuances distintas nas resoluções que apresentam que se prendem com a justificação matemática à qual recorrem, representação, etc. Tendo em conta que o objetivo do estudo é analisar essas mesmas justificações e representações, a opção por explorar as produções de cada aluno individualmente permitiu recolher dados mais diferenciados.

4.5 Questões de natureza ética associadas ao estudo

Conforme a Carta de Ética do Instituto da Educação (2016), as orientações a serem respeitadas são a explicitação dos cuidados éticos em projetos de investigação, proteção dos participantes, consentimento informado, confidencialidade e privacidade, entre outras coisas.

Todas estas questões éticas foram respeitadas, tendo sido disponibilizado ao diretor do colégio um documento (Anexo 17) a informar sobre o projeto REASON a ser realizado e em que o mesmo consistia, de modo a este autorizar o avanço da investigação. Posteriormente à confirmação do senhor diretor do colégio, foi distribuído pelos alunos os documentos (Anexo 16) que continham o pedido de consentimento dos encarregados de educação (EE) para os seus educandos participarem no projeto. Este documento continha a explicitação dos objetivos do projeto, bem como a garantia de confidencialidade e privacidade dos seus educandos, cuja identificação nunca foi revelada, nem qualquer tipo de informação que permita essa mesma identificação. Para tal, no RPES serão sempre utilizadas letras maiúsculas para me referir a qualquer aluno. Foi também informada a gravação vídeo de algumas aulas bem como a recolha de documentos produzidos pelos alunos, cujas imagens e documentos serão utilizados única e exclusivamente para fins do projeto. Além disso, foi salientado que, caso um aluno não aceite participar não sofrerá qualquer tipo de represálias nem ficará de forma nenhuma prejudicado. Indica-se ainda que a qualquer momento o aluno poderá desistir da participação no projeto. Todos os encarregados de educação responderam positivamente à solicitação de participação dos seus educandos no projeto.

Posto isto, julgo que todas as questões éticas levantadas na Carta de Ética do Instituto da Educação (2016) foram respeitadas na recolha de dados e ao longo da elaboração deste projeto de modo a proteger os dados pessoais dos alunos.

Capítulo 5 Análise de dados

Neste capítulo é apresentada a análise dos dados recolhidos ao longo da intervenção. A análise realizada procura responder às questões de investigação formuladas. Como referi anteriormente, a análise está organizada por tipologia de tarefas matemáticas realizadas pelos alunos ao longo da Unidade Didática. No final de cada secção relativa a cada tipologia de tarefa, apresento uma síntese dos resultados obtidos, procurando identificar a incidência de justificações matemáticas de acordo com os níveis de complexidade e as representações usadas, bem como as dificuldades dos alunos associadas às mesmas. Além disso, é feita também uma reflexão relativa aos conhecimentos matemáticos evidenciados pelos alunos nesse processo do raciocínio matemático.

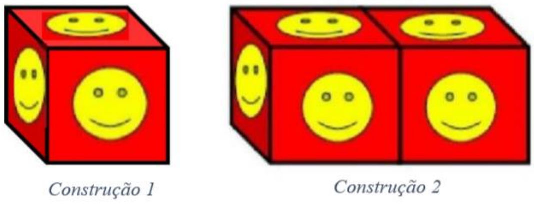
5.1 Tarefas de exploração visando a generalização

Inicio esta análise com as tarefas propostas na primeira e segunda aulas da intervenção (Anexo 6: 2 de março de 2020, Anexo 7: 4 de março de 2020), que foram lecionadas presencialmente. Nestas aulas abordei as expressões algébricas de forma integrada no tema Sequências com o objetivo de promover a linguagem e manipulação algébricas por parte dos alunos, competências essenciais no tema das Equações algébricas.

Para o cumprimento dos objetivos mencionados, foi proposta a ficha de trabalho “Expressões algébricas” (Anexo 1) que incluía tarefas sobre sequências e expressões algébricas. Esta ficha de trabalho serviu de base ao trabalho das duas primeiras aulas.

As tarefas propostas visavam a generalização e o desenvolvimento da linguagem algébrica pelos alunos. Assim, importa observar e analisar as produções dos alunos que emergiram na questão 1.2 da ficha de trabalho “Expressões algébricas” (Figura 6), uma vez que esta visa a generalização e, além disso, é solicitado, nesta questão, que os alunos justifiquem a sua resposta.

1. A Joana está a fazer construções com cubos e autocolantes para o seu irmão mais novo. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos e depois cola um autocolante em cada uma das faces visíveis. As imagens mostram duas construções que a Joana fez com um e com dois cubos.



1.1. Indique quantos autocolantes são usados numa construção com:

a) três cubos. Justifique.

b) quatro cubos. Justifique.

1.2. Qual o termo geral da sucessão relativa ao número de autocolantes de cada construção? Justifique.

Figura 6: Enunciado das questões 1.1 e 1.2 da ficha de trabalho

Todos os grupos de trabalho conseguiram chegar à generalização, no entanto, utilizaram estratégias e justificaram-nas de formas distintas. De seguida, apresento várias produções dos alunos na questão 1.2 que diferem no nível de complexidade de justificações matemáticas e representações que apresentam, que irei classificar de acordo com a Tabela 11 (Capítulo 4) e Tabela 1 (Capítulo 2), respetivamente.

Na resolução realizada pelo aluno F relativa à questão 1.2 (Figura 7), este apresenta o termo geral, como é pedido na questão, e recorre à linguagem simbólica alfanumérica, no entanto, não apresenta qualquer justificação da expressão que indica, pelo que esta exibe um nível de complexidade 0.

1.2

$\boxed{u_n = 4n + 2}$

Figura 7: Resolução do aluno F da questão 1.2 da ficha de trabalho "Expressões algébricas".

Na resolução realizada pelo aluno E (Figura 8) podemos observar que este chega ao termo geral, mas para tal apoia-se em exemplos, ou seja, casos particulares da situação. A justificação apresentada pelo aluno exibe um nível de complexidade 2. Em termos das representações utilizadas, o aluno E apresenta o termo geral recorrendo à linguagem simbólica alfanumérica, no entanto, na sua justificação, apresenta expressões numéricas e respetivos cálculos, pelo que recorre também à linguagem numérica.

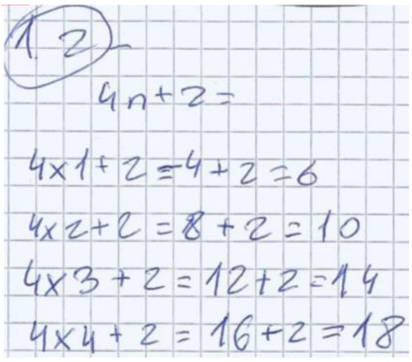


Figura 8: Resolução do aluno E da questão 1.2 da ficha de trabalho "Expressões algébricas".

Na resolução apresentada a seguir, do aluno K (Figura 9), surge uma justificação de nível de complexidade 3B, isto porque foca-se em aspetos gerais da situação particular. O aluno apresenta uma estratégia relativamente à formação de cada construção, estratégia essa generalizável para qualquer construção, no entanto, não fica evidente que o mesmo compreende a formação evocada. Em termos de representação, na resolução presente na Figura 9, o aluno apresenta o termo geral recorrendo à linguagem simbólica alfanumérica e justifica-o recorrendo à linguagem natural, por fim, para confirmar se a expressão que tinha encontrado originava os termos dados recorreu a cálculos apresentando uma linguagem numérica.

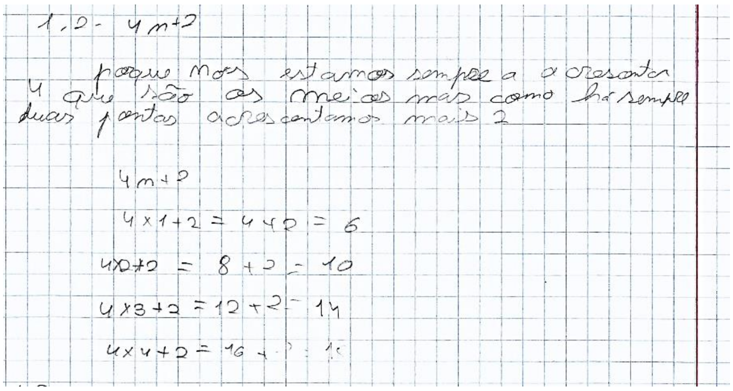


Figura 9: Resolução do aluno K da questão 1.2 da ficha de trabalho "Expressões algébricas".

A justificação apresentada pelo aluno K (Figura 9) no papel não permite a clara evidência que o mesmo compreendeu a formação da construção. Este aluno foi solicitado para ir ao quadro e justificou claramente o que queria dizer com o que escreveu. A justificação dada na discussão coletiva foi a seguinte:

> **Aluno K:** Nós estamos sempre a acrescentar 4 autocolantes mais um da ponta. Nós aqui [em um cubo] temos dois [autocolantes] nas pontas e 4 no meio. Se nós acrescentarmos este cubo, nós vamos retirar esta ponta e vem para este lado [o autocolante] e nós vamos acrescentar mais 4. Daí quando nós temos 6

autocolantes, vamos retirar este autocolante [de uma das faces] e vamos pôr aqui [na face que ficará na "ponta" da construção] e vamos acrescentar 4.

Professora: E a expressão? Tem de explicar a expressão.

Aluno K: 4n é o número que vamos acrescentando e depois "+2" são os das pontas.

Professora: Porque é que o número que vamos acrescentando é $4n$?

Aluno K: Porque o n significa mais ou menos os cubos que temos na sequência.

Tal como já tinha sido verificado no trabalho autónomo, a justificação apresentada pelo aluno também na discussão coletiva, tem um nível de complexidade 3B, visto que, o aluno recorre a transformações do objeto que se considera como representativo de uma classe de objetos, ou seja, independentemente da construção de que estejamos a falar, e justifica a validade da sua afirmação, portanto, que o termo geral é $u_n = 4n + 2$.

Na resolução que se apresenta de seguida, na Figura 10, apesar da explicação dada pelo aluno D ser um pouco confusa, é percetível a estratégia que apresenta: começa por indicar que a sequência vai de 4 em 4, ou seja, que a lei de formação é somar 4 ao anterior. Assim, a sucessão será do tipo $4n$, de seguida, procede-se à comparação dos termos dessa sucessão com a apresentada na tarefa. Se o termo geral for 4n então o primeiro termo é 4, mas o primeiro termo da sequência é 6. Subtraindo o primeiro termo da sequência por 4 que vem da lei de formação obtém-se o +2. Daí vem que o termo geral terá de ser $u_n = 4n + 2$. O aluno D recorre a uma estratégia de resolução que abordámos em aulas anteriores sobre sequências e sucessões. Como, para se justificar recorre a procedimentos matemáticos habituais, essa justificação apresenta um nível de complexidade 3C.

Em termos de representações usadas pelo aluno (Figura 10), verificam-se diversas tipologias. Começa por apresentar um esquema onde se apercebe que a sequência vai de 4 em 4, apresentando uma representação icónica. De seguida, quando o aluno apresenta "$1.^{\text{º}} \times 4 = 4 + 2 = 6$" estes está a referir-se ao 1.º termo, pelo que, embora de forma incorreta, recorre à linguagem sincopada, pré-simbólica. Por fim, o aluno representa o termo geral simbolicamente recorrendo à notação alfanumérica e justifica-o recorrendo à linguagem natural.

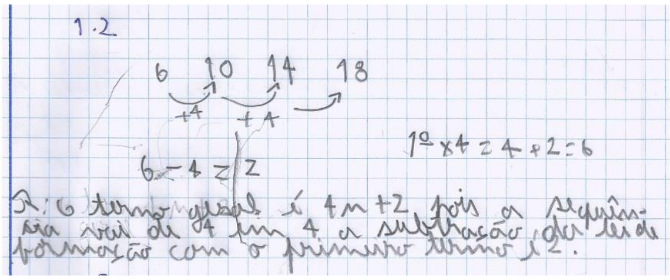
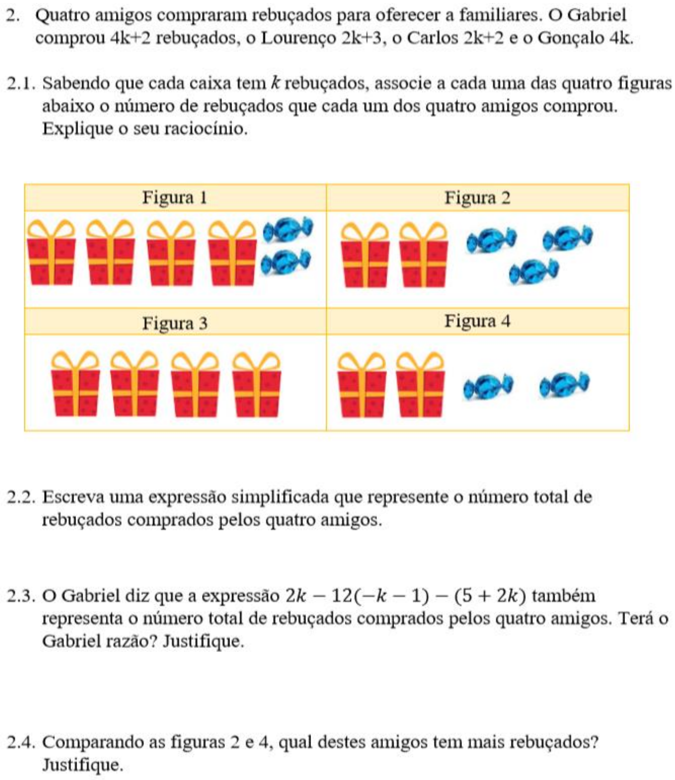


Figura 10: Resolução do aluno D da tarefa 1.2 da ficha de trabalho “Expressões algébricas”.

Passemos agora à questão 2.4 da ficha de trabalho “Expressões algébricas” (Anexo 1) realizada na segunda aula da intervenção (Anexo 7: 4 de março de 2020) cujo enunciado apresento na Figura 11. Mais uma vez esta tarefa visa a generalização, na medida em que é necessário encontrar uma expressão que represente o número total de rebuçados comprados pelos quatro amigos, seja qual for o número de rebuçados presentes nas caixas.



2. Quatro amigos compraram rebuçados para oferecer a familiares. O Gabriel comprou 4k+2 rebuçados, o Lourenço 2k+3, o Carlos 2k+2 e o Gonçalo 4k.

2.1. Sabendo que cada caixa tem k rebuçados, associe a cada uma das quatro figuras abaixo o número de rebuçados que cada um dos quatro amigos comprou. Explique o seu raciocínio.

2.2. Escreva uma expressão simplificada que represente o número total de rebuçados comprados pelos quatro amigos.

2.3. O Gabriel diz que a expressão $2k - 12(-k - 1) - (5 + 2k)$ também representa o número total de rebuçados comprados pelos quatro amigos. Terá o Gabriel razão? Justifique.

2.4. Comparando as figuras 2 e 4, qual destes amigos tem mais rebuçados? Justifique.

Figura 11: Enunciado da tarefa 2 da ficha de trabalho “Expressões algébricas”.

O aluno R na sua resolução da questão 2.4 (Figura 12) apresenta uma resposta correta, no entanto, não é possível perceber o seu raciocínio a partir do que o mesmo escreveu no papel, assim sendo, o aluno apresenta uma afirmação que não é uma justificação apresentando um nível de complexidade 0. Em termos de representação, o aluno recorre à linguagem sincopada pré-simbólica quando apresenta “Fig.2 = 2k+3”.

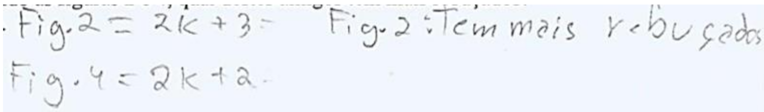


Figura 12: Resolução do aluno R da questão 2.4 da ficha de trabalho "Expressões algébricas".

Surgiram ainda, na questão 2.4, mais dois tipos de justificação. A primeira baseada em coerência lógica tal como é apresentado na Figura 13 (nível de complexidade 3A), na medida em que a aluna interpreta o que observa da imagem e retira uma conclusão lógica, embora esta tenha trocado o nome do Carlos por Gonçalo refere-se à imagem correta. A segunda, uma justificação onde a aluna aplica procedimentos matemáticos para justificar a sua resposta (nível de complexidade 3C) como apresentado na Figura 14. Em termos de representações, na Figura 13 está presente a linguagem natural e, na Figura 14, a linguagem simbólica alfanumérica.

"Nas caixas o Lourenço e o Gonçalo têm o mesmo n.º mas o Lourenço fora das caixas tem mais 1 rebuçado"

Figura 13: Resolução da aluna Q da questão 2.4 da ficha de trabalho "Expressões algébricas".

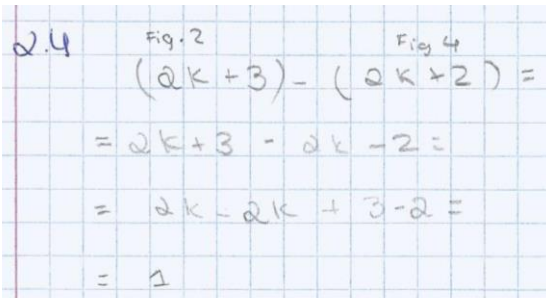


Figura 14: Resolução da aluna O da questão 2.4 da ficha de trabalho "Expressões algébricas".

Na Tabela 12 apresento a frequência de justificações de acordo com o seu nível de complexidade. De modo a quantificar os níveis de complexidade que mais surgem em cada tipologia de tarefa, optei por calcular a percentagem média de vezes em que cada nível surge nas produções dos alunos. Para o fazer, calculei primeiramente a percentagem de vezes em que cada nível de justificação surge em cada questão e, por fim, calculei a média aritmética dessas percentagens para perceber como isso se reflete nas tarefas exploratórias que visam a generalização.

Tabela 12: Número de resoluções onde surgiram justificações dos vários Níveis de complexidade em tarefas de exploração que visam a generalização.

Aula	Tarefa	Níveis de complexidade						N.º total de resoluções
		0	1	2	3A	3B	3C	
1	1.2	5	0	3	0	1	6	15
2	2.4	2	0	0	5	0	1	8
Percentagem média (%)		29,2	0,0	10,0	31,3	3,3	26,3	

Através da análise da Tabela 12 é possível observar que os níveis de complexidade das justificações dos alunos variam razoavelmente de tarefa para tarefa. Por exemplo, o nível de complexidade 3C surge seis vezes na questão 1.2, mas apenas surge mais uma vez na tarefa 2.4. Já o nível de complexidade 3A surge cinco vezes na questão 2.4, mas não surge na 1.2.

Quando as tarefas requerem uma justificação mais elaborada, como é o caso da questão 1.2, onde é necessário recorrer a linguagem natural na elaboração de um pequeno texto, ou onde meros cálculos matemáticos não constituem uma justificação, os alunos resistem a apresentá-la no papel. Tal encontra-se expresso na Tabela 12, onde se pode verificar que na questão 1.2 existe uma alguma incidência de justificações de níveis de complexidade mais baixos. Assim sendo, foi necessário o questionamento aos alunos como: "como conclui isso?", "como chegou a esse resultado?", ao qual muitas vezes responderam "é preciso escrever isso?", para que surgissem algumas justificações mais elaboradas. Apesar disso, alguns alunos alcançaram o nível mais elevado de justificação, uns através do questionamento por mim efetuado, outros por iniciativa própria.

No que diz respeito à percentagem média de ocorrências de cada nível de justificação nas resoluções de tarefas de exploração que visam a generalização, podemos observar que o nível de complexidade de justificação que mais surge é o nível 3A (31,3%). Assim, os alunos baseiam-se muito em coerência lógica para sustentar as suas justificações. O segundo nível que mais se evidencia e que apresenta uma percentagem de incidência considerável, é o 0 (29,2%), pelo que se revela alguma resistência à justificação em tarefas com as características mencionadas, este é um aspeto a ser melhorado por parte dos alunos. É de assinalar também que a percentagem de alunos que apresenta uma justificação com nível de complexidade 3C é próxima do nível de complexidade 0, pelo que também fica evidente a heterogeneidade que a turma apresenta e a necessidade de dar atenção a este aspeto ao longo da unidade didática. O nível de complexidade que menos surge é o 1.

De seguida apresento a Tabela 13 onde quantifico o número de vezes que cada tipo de representação surge nas produções dos alunos em tarefas de exploração que visam a generalização. De novo, indico a percentagem média de vezes em que cada representação surge nas produções dos alunos de modo a perceber quais as que mais emergem em tarefas com as características mencionadas.

É de notar que, os alunos, nas suas resoluções, recorrem a mais do que uma representação, pelo que, a soma do número de vezes que cada representação surge numa dada questão não é igual ao número total de resoluções. Ou seja, quando na tabela é dito que 13 alunos recorreram à linguagem simbólica alfanumérica, não significa que esses mesmos alunos não tenham recorrido também à linguagem natural, ou outra.

Tabela 13: Tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos em tarefas de exploração que visam a generalização.

Aula	Tarefa	Tipos de Representação								N.º total de resoluções
		LN	N	Icónica			Pré-simbólica	Simbólica		
				D	T	DE	S	I	A	
1	1.2	4	3	0	0	5	3	0	13	15
2	2.4	7	0	0	0	0	1	0	2	8
Percentagem média (%)		57,1	10,0	0,0	0,0	16,7	16,3	0,0	55,8	

Legenda: Linguagem natural (LN); Numérica (N); Desenhos (D); Tabelas (T); Diagramas ou Esquemas (DE); Sincopada (S); Idiossincrática (I); Alfanumérica (A).

Ao analisar a Tabela 13 verificamos que, também dependendo da tarefa proposta, as representações variam razoavelmente. Na questão 1.2 estão envolvidas expressões algébricas, pelo que, quase inevitavelmente, os alunos recorrem à linguagem simbólica alfanumérica. Não obstante, para responder à questão 2.4 não é necessário recorrer a simbologia ou manipulação algébrica, embora essa possa ser também usada. Assim, nesta última questão, os alunos recorreram predominantemente a uma linguagem natural para expressar os seus argumentos.

Além da linguagem natural e da linguagem simbólica alfanumérica que têm maior percentagem de ocorrência, havendo um destaque para a representação simbólica alfanumérica, outras representações também surgem, como a linguagem sincopada pré-simbólica, linguagem numérica, o recurso a esquemas e, ainda, linguagem pré-simbólica idiossincrática. Não se registou o recurso a desenhos ou tabelas.

Debruçando-nos agora sobre os conhecimentos matemáticos evidenciados pelos alunos, já referi que toda a turma atingiu facilmente a generalização nas tarefas propostas. No entanto, ao nível das representações, emergem algumas dificuldades, inclusivamente no tema anterior ao da unidade didática ao qual se refere este relatório, ou seja, o tema das sequências e sucessões, onde muito poucos alunos se referem ao termo geral como sendo $u_n = 4n + 2$ apresentando apenas a expressão algébrica.

5.2 Equações

O capítulo das Equações lineares exige algum conhecimento sobre simbolização e manipulação algébricas. O domínio da simbologia das equações é algo que se vai aperfeiçoando com o tempo e com a prática na resolução das mesmas, pelo que, as dificuldades na linguagem algébrica são relativamente habituais no princípio do capítulo de Equações do 1.º grau que se inicia no 7.º ano de escolaridade.

Para analisar as justificações matemáticas às quais os alunos recorreram em tarefas onde era necessário justificar os procedimentos utilizados na resolução de equações, recorri à análise de quatro questões. A primeira foi a questão 1.3 (Figura 15) presente na ficha de trabalho n.º 1 (Anexo 2) disponibilizada aos alunos na quinta aula da intervenção, ou seja, na segunda aula assíncrona, lecionada à distância (Anexo 8: 17 de abril de 2020). É de salientar que para responder à questão os alunos recorrem à alínea anterior, questão 1.2, onde foi pedido que resolvessem as equações presentes nas alíneas a), b) e c).

1. Observe as seguintes equações:

a) $-5 + x = -10$

b) $y + 7 + 3 = 0$

c) $-6 = x - 1$

1.3. Algumas das equações são equivalentes? Justifique.

Figura 15: Enunciado da questão 1.3 da ficha de trabalho n. º 1.

A resolução do aluno F (Figura 16) tem apenas em consideração o facto das equações apresentarem o mesmo conjunto solução, não mencionando a incógnita das mesmas. O aluno resolveu com sucesso as equações na questão 1.2, chegando ao mesmo conjunto solução nas equações apresentadas em a) e em c). O nível de complexidade da sua justificação é 2, na medida em que se apoia neste caso em concreto, não atendendo às características gerais de equações equivalentes, isto porque esta justificação é válida nesta situação porque estamos perante duas equações com a mesma incógnita, contudo, numa situação distinta este argumento já poderia não ser válido. Em termos de representação, o aluno recorre à linguagem natural.

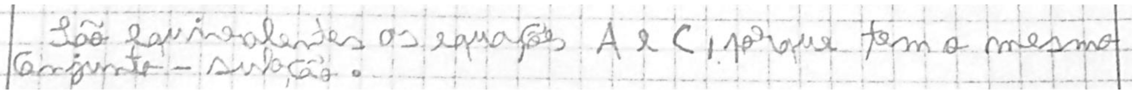


Figura 16: Resolução do aluno F da questão 1.3 da ficha de trabalho n. º1.

As resoluções da aluna A e do aluno N (Figura 17 e Figura 18, respetivamente) integram uma justificação com nível de complexidade 3C, na medida em que se apoiam na definição de equações equivalentes para sustentarem a sua afirmação, referindo que ambas as equações possuem o mesmo conjunto solução e a mesma incógnita. As respostas apresentadas pelos alunos são distintas, porque o aluno N errou nos cálculos da primeira equação aquando da resolução da questão 1.2, no entanto, como a sua resolução é coerente com o que realizou anteriormente, este apresenta uma resposta correta segundo os seus cálculos. Em termos de representação as duas resoluções (Figura 17 e Figura 18) também apresentam igual tipologia, recorrendo à linguagem natural.

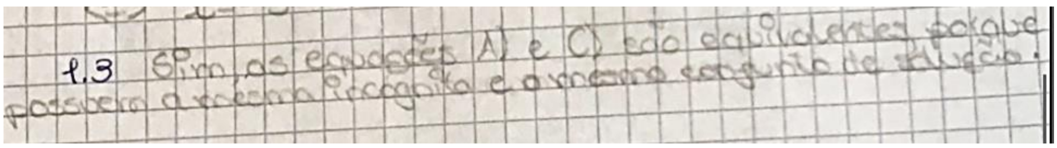
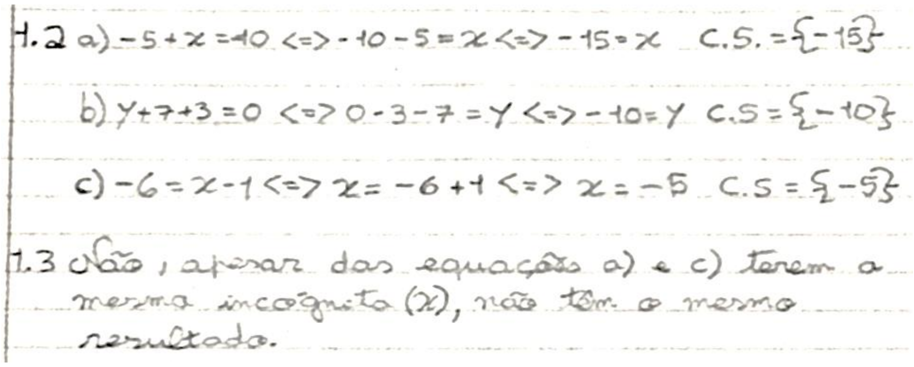


Figura 17: Resolução da aluna A da questão 1.3 da ficha de trabalho n.º 1.



1.2 a) $-5+x=-10 \Leftrightarrow -10-5=x \Leftrightarrow -15=x$ C.S. $=\{-15\}$

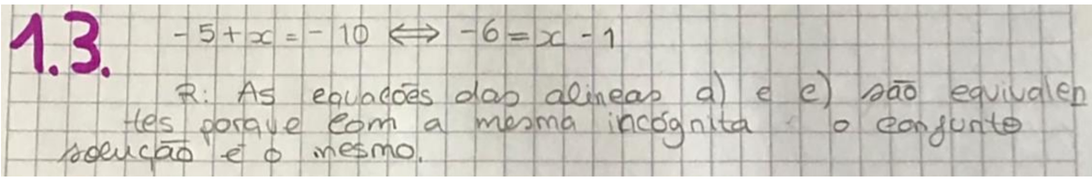
b) $y+7+3=0 \Leftrightarrow 0-3-7=y \Leftrightarrow -10=y$ C.S $=\{-10\}$

c) $-6=x-1 \Leftrightarrow x=-6+1 \Leftrightarrow x=-5$ C.S $=\{-5\}$

1.3 Não, apesar das equações a) e c) terem a mesma incógnita (x), não têm o mesmo resultado.

Figura 18: Resolução do aluno N da questão 1.3 da ficha de trabalho n.º 1.

Relativamente à resolução da aluna G (Figura 19), a justificação que surge é de nível de complexidade 3C, tal como as justificações apresentadas anteriormente na Figura 17 e na Figura 18. No entanto, em termos de representação, a aluna além de apresentar a justificação com recurso à linguagem natural, apresenta ainda as equações equivalentes representadas simbolicamente recorrendo à notação alfanumérica.



1.3. $-5+x=-10 \Leftrightarrow -6=x-1$

R: As equações das alíneas a) e c) são equivalentes porque com a mesma incógnita o conjunto solução é o mesmo.

Figura 19: Resolução da aluna G da questão 1.3 da ficha de trabalho n.º 1.

Debrucemo-nos agora na tarefa 2 (Figura 20) presente na ficha de trabalho n.º 2 (Anexo 3) apresentada aos alunos na 8.ª aula da intervenção, ou seja, na 6.ª aula à distância (Anexo 12: 5 de maio de 2020). A tarefa é composta por quatro questões. Irei analisar apenas as questões a) e c) por serem as alíneas onde ocorreram justificações com níveis de complexidade mais distintos e com recurso a várias representações.

2. As equações seguintes foram resolvidas pela Inês.
Verifique se a Inês cometeu alguma incorreção na resolução.
Em caso afirmativo, assinale o que considera estar errado e explique porquê.

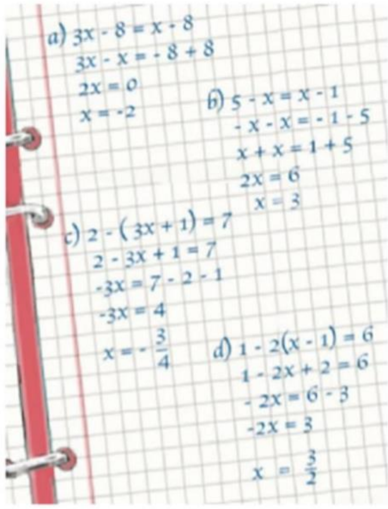


Figura 20: Enunciado da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 2.

Na resolução do aluno L (Figura 21) podemos observar que o mesmo se foca nos valores da equação dada, não atendendo a procedimentos gerais das equações. Ou seja, a justificação dada não é aplicável a qualquer outra equação. Assim, o aluno, apoia-se neste caso particular, ou seja, exibe uma justificação com nível de complexidade 2. Relativamente à representação utilizada na justificação, este recorre à linguagem natural para se expressar.

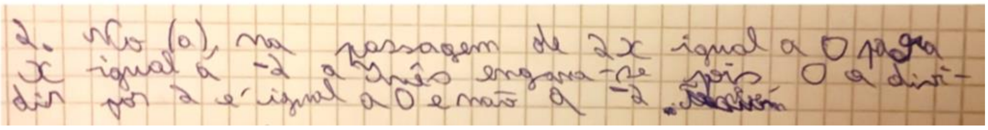


Figura 21: Resolução do aluno L da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2.

No enunciado da questão 2 a) (Figura 20) era pedido para os alunos assinalarem o que estava errado na resolução apresentada e explicar porquê. A aluna C na sua resolução relativa a esta questão (Figura 22), optou por resolver a equação e como o resultado obtido foi diferente do apresentado no enunciado, esta referiu que a resolução estava errada. Como tal, a aluna não correspondeu ao solicitado no enunciado porque não deteta o erro cometido apenas indica que está errado tendo-se apoiado em procedimentos simbólicos que aplicou corretamente. Como uma equação do 1.º grau apenas apresenta uma solução, a aluna, por coerência lógica justifica a sua afirmação, como tal apresenta um nível de complexidade 3A. Em termos de representação, a aluna recorreu à linguagem simbólica alfanumérica acompanhada por justificações recorrendo à linguagem natural.

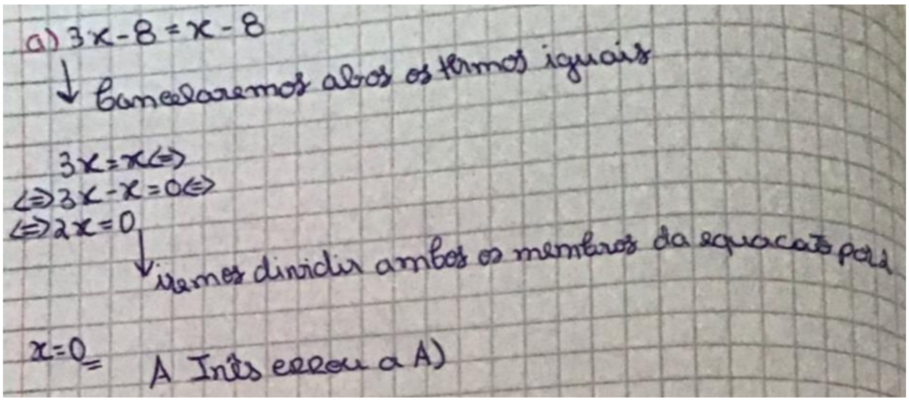


Figura 22: Resolução da aluna C da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2.

Na resolução da aluna A da mesma questão (Figura 23) surge uma justificação que exibe um nível de complexidade 3B, na medida em que, a aluna foca-se em aspetos gerais de uma situação particular, dizendo que o zero dividido por dois ou por qualquer número é sempre 0. Em termos de representação, a aluna recorre à linguagem simbólica alfanumérica e linguagem natural.

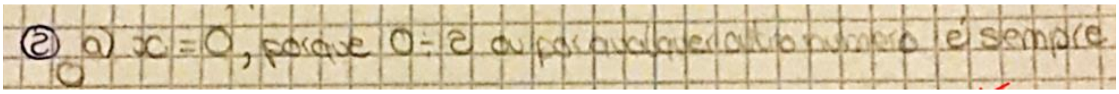


Figura 23: Resolução da aluna A da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2.

Comparativamente à resolução apresentada na Figura 23, a justificação apresentada na Figura 24 é bastante semelhante a esta, no entanto, o aluno K recorre a uma propriedade da multiplicação: a existência de elemento absorvente. Embora a propriedade seja relativa à multiplicação, foi transmitido aos alunos que dividir dois números é multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor, como tal, as propriedades da multiplicação aplicam-se também na divisão. Devido ao facto de este ter referido a propriedade ainda que de forma incompleta visto não ter mencionado a operação à qual se refere a propriedade, esta justificação exibe um nível de complexidade 3C. Relativamente à representação utilizada na justificação esta é também, tal como na Figura 23, linguagem simbólica alfanumérica e linguagem natural.

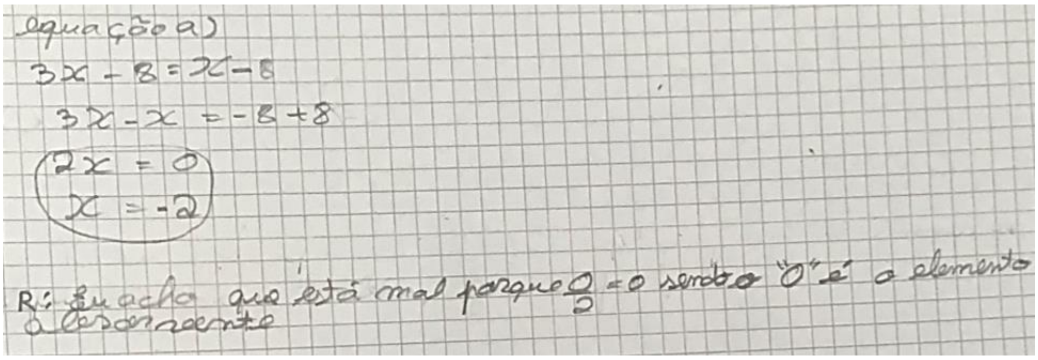


Figura 24: Resolução do aluno K da questão 2 a) da ficha de trabalho n.º 2.

Relativamente à questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2, a aluna A na sua resolução (Figura 25) apenas identifica um dos erros da equação e relativamente ao que identifica como errado, não refere propriedades gerais, ou seja, foca-se nos valores em concreto da equação dada. Exibe assim uma justificação com nível de complexidade 2. Relativamente à representação, esta recorre a uma linguagem pré-simbólica sincopada, na medida em que alterna entre linguagem simbólica alfanumérica e linguagem natural.

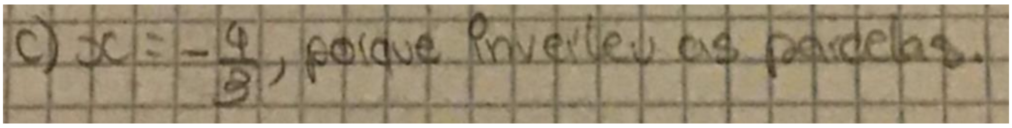


Figura 25: Resolução da aluna A da questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2.

Na resolução do aluno J (Figura 26), este apresenta uma justificação que exibe um nível de complexidade 3B, isto porque, o aluno foca-se em aspetos gerais da situação em particular, ou seja, referindo de forma informal que dois números com sinais posicionais distintos a multiplicar resultam num número negativo, reportando-se ao primeiro erro que a resolução do enunciado revela. Relativamente à linguagem utilizada, esta é pré-simbólica sincopada, na medida em que o aluno usa simultaneamente a linguagem natural e símbolos de operações para exprimir de forma abreviada, mas incompleta, uma regra matemática.

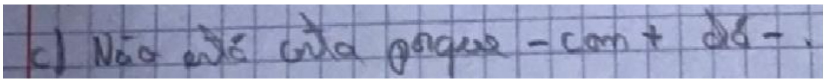


Figura 26: Resolução do aluno J da questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2.

Tal como a justificação apresentada na Figura 26, a aluna G (Figura 27) apresenta uma justificação onde se foca em aspetos gerais de uma situação particular, ou seja, uma justificação com nível de complexidade 3B, na medida em que refere que os sinais de menos atrás do traço de fração afetam os sinais dos termos dentro de parêntesis, fazendo uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição mas não a evocando explicitamente. Relativamente à representação, a aluna recorre à linguagem natural para expressar a sua justificação.

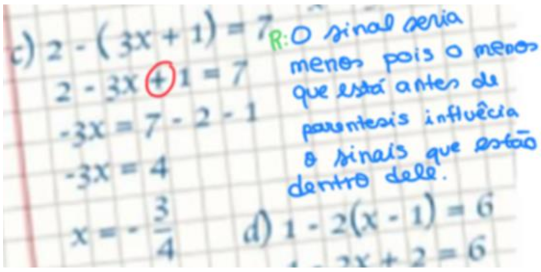


Figura 27: Resolução da aluna G da questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2.

Comparativamente às justificações apresentadas nas Figura 26 e Figura *27*, a aluna O (Figura 28) apoia-se numa propriedade da multiplicação, referindo-a ainda que de forma incompleta e pouco explícita, pelo que a sua justificação exibe um nível de complexidade que pode ser classificado como 3C. Em termos de representação, a aluna recorre à linguagem natural.

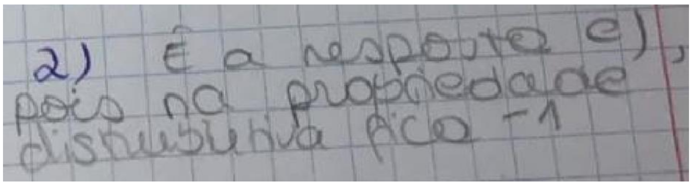


Figura 28: Resolução da aluna O da questão 2 c) da ficha de trabalho n.º 2.

Debrucemo-nos agora na questão 35.2 a) da página 37 do manual adotado pelo Colégio Militar para o 7.º ano de escolaridade (Passos & Correia, 2019) (Figura 29). Esta questão foi proposta aos alunos na 10.ª aula da intervenção, ou seja, na 8.ª aula à distância (Anexo 14: 15 de maio de 2020).

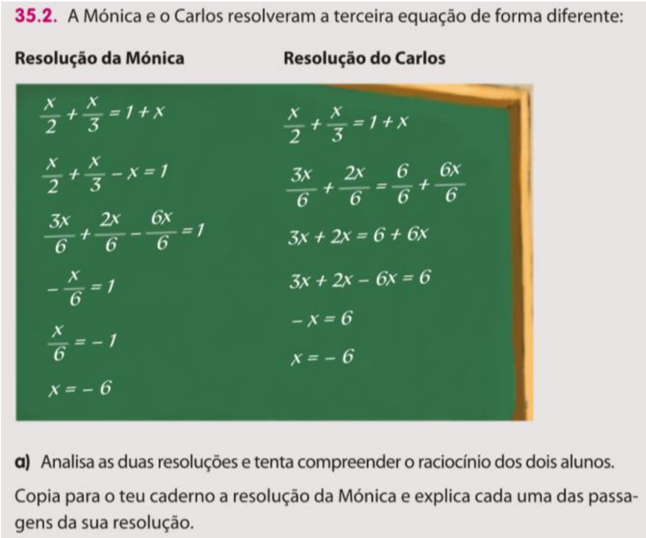


Figura 29: Enunciado da questão 35.2 a) da página 37 do manual (Passos & Correia, 2019).

Na resolução da aluna G (Figura 30), esta foca-se nos valores em concreto da equação dada ("passou o +x para o 1.º membro trocando-lhe o sinal", "Multiplicou ambos os membros por -1", etc.), ou seja, apoia-se neste caso em particular não apresentando argumentos generalizáveis. Assim, a justificação apresentada exibe um nível de complexidade 2. Relativamente à representação, a aluna faz uso da linguagem natural.

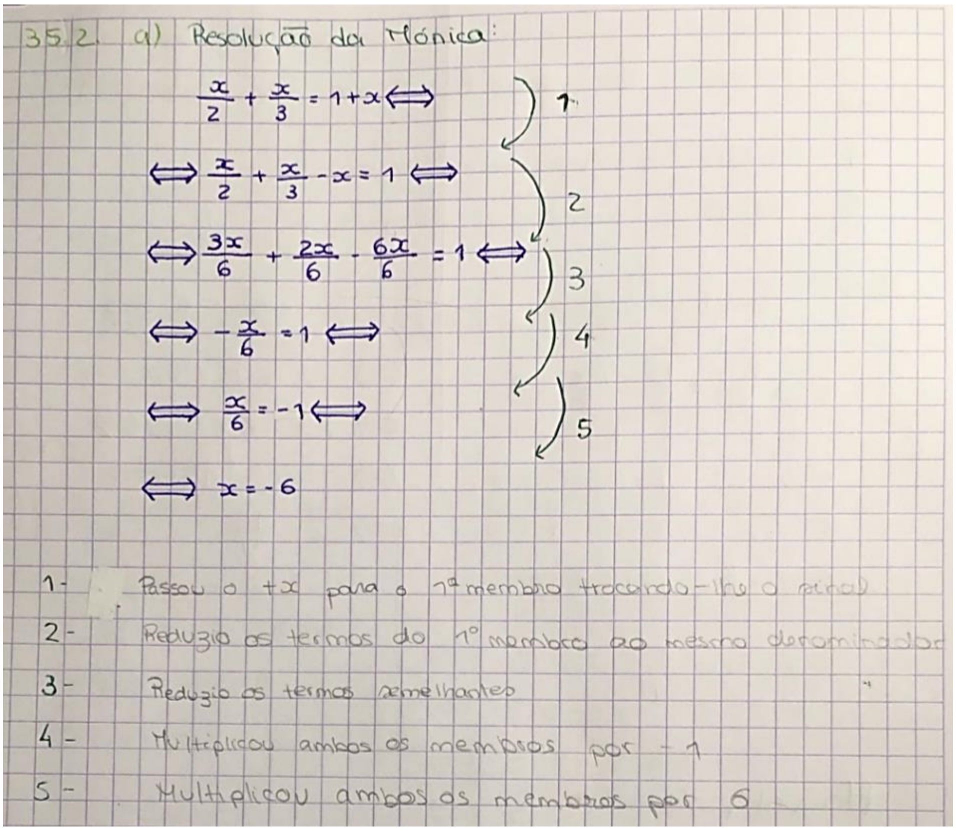


Figura 30: Resolução da aluna G da questão 35.2 a) da página 37 do manual (Passos & Correia, 2019).

Nas resoluções dos alunos A e N relativas à questão 35.2 a) (Figura 31 e Figura 32, respetivamente), ambos apresentam uma justificação com nível de complexidade 3C, na medida em que não se focam apenas nos valores da equação dada, justificando de forma que se adapta a qualquer outra equação resolvida de igual forma. Além disso, apoiam-se nos procedimentos matemáticos que haviam aprendido para a resolução de equações, por exemplo, “juntou os termos semelhantes”, “reduziu ao mesmo denominador” e ainda, terminam evocando uma regra prática. Ambos os alunos recorrem à linguagem natural para expressar a sua justificação, embora o aluno E recorra a uma forma mais esquematizada de apresentação da mesma.

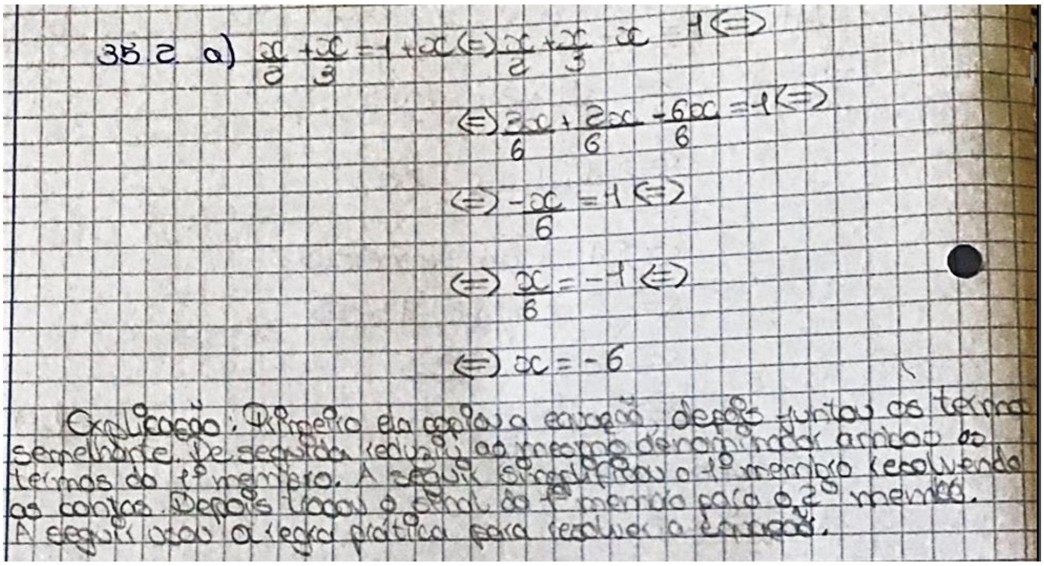


Figura 31: Resolução da aluna A da questão 35.2 a) da página 37 do manual (Passos & Correia, 2019).

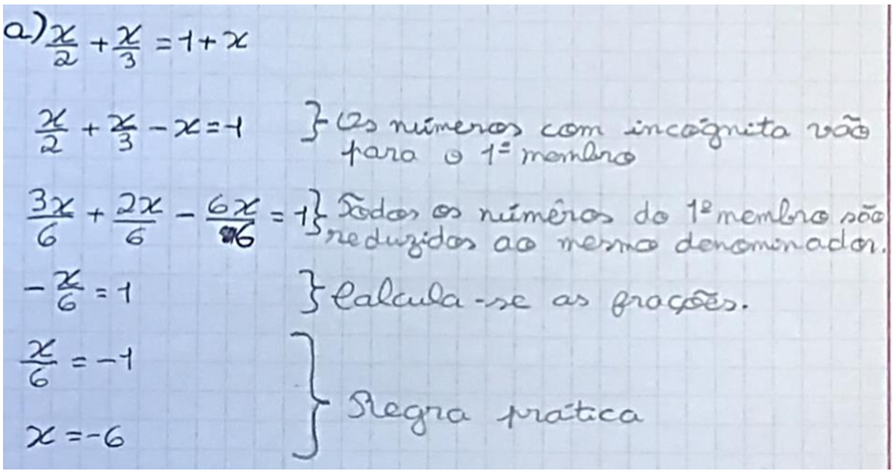


Figura 32: Resolução do aluno N da questão 35.2 a) da página 37 do manual (Passos & Correia, 2019).

Apresento de seguida a Tabela 14 onde se encontram a frequência de justificações presentes em tarefas de resolução de equações de acordo com o seu nível de complexidade. Indico ainda a percentagem média de vezes em que surge cada nível de complexidade nas produções dos alunos em tarefas deste tipo.

Tabela 14: Número de resoluções onde surgiram justificações dos vários Níveis de complexidade em tarefas sobre equações.

Aula	Tarefa	Níveis de complexidade						N.º total de resoluções
		0	1	2	3A	3B	3C	
4	1.3	0	2	4	0	0	6	12
8	2 a)	0	1	3	2	2	3	11
8	2 c)	2	3	2	0	2	3	12
10	35.2 a)	0	2	5	0	3	2	12
Percentagem média (%)		4,2	16,9	29,7	4,6	15,0	29,7	

Pela análise da Tabela 14: Número de resoluções onde surgiram justificações dos vários Níveis de complexidade em tarefas sobre equações. é possível observar que os níveis de complexidade das justificações dos alunos variam razoavelmente quando o objetivo das tarefas é indicar os procedimentos utilizados na resolução de uma equação. Ao analisar a tabela verificamos que dois dos níveis de complexidade presentes na tabela não surgem muito nas justificações dos alunos, o nível de complexidade 0 e o nível de complexidade 3A. Os níveis de complexidade que mais surgem nas justificações dos alunos ocorrem em igual percentagem nas tarefas selecionadas para análise, ou seja, as justificações com nível de complexidade 2 e as justificações com nível de complexidade 3C.

Nas justificações apresentadas pelos alunos dos procedimentos relativos à resolução de uma equação, estes habitualmente ou se apoiam nos valores efetivos da equação em questão (por exemplo, "passou o -1 do 1.º para o 2.º membro e trocou o sinal") ou expressam-se de uma forma mais generalizada (por exemplo, "colocou no 1.º membro os termos com incógnita e no 2.º os termos sem incógnita"; "Aplicou as regras práticas"). Esta opção de justificar da primeira ou segunda formas mencionadas diferem entre apresentar uma justificação com nível de complexidade 2 no primeiro caso, ou seja, baseado no caso em concreto que se está a abordar, ou exibir uma justificação com nível de complexidade 3B ou 3C, respetivamente. O que difere as justificações com nível de complexidade 3C, das justificações com nível de complexidade 3B é o facto de o aluno mencionar, no primeiro caso, a propriedade ou procedimento matemático ao qual recorre o que no nível de complexidade 3B já não se verifica.

É de salientar que o nível de complexidade 0 apresenta uma percentagem de ocorrência de apenas 4,2% que comparativamente às tarefas de exploração de visam a generalização, diminuiu bastante visto que nestas, a percentagem tinha sido de 29,2%. Assim sendo, houve uma evolução no sentido da diminuição dos alunos que não apresentavam qualquer tipo de justificação.

Na Tabela 15 apresento o número de vezes em que cada tipologia de representação surgiu nas produções dos alunos. É de salientar que uma resolução pode apresentar mais do que uma representação.

Tabela 15: Tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos em tarefas sobre equações.

Aula	Tarefa	Tipos de Representação								N.º total de resoluções
		LN	N	Icónica			Pré-simbólica	Simbólica		
				D	T	DE	S	I	A	
3	1.3	12	0	0	0	0	0	0	2	12
8	2 a)	8	0	0	0	0	1	0	3	11
8	2 c)	7	0	0	0	0	4	0	3	12
10	35.2 a)	12	0	0	0	0	0	0	0	12
Percentagem média (%)		82,8	0,0	0,0	0,0	0,0	10,6	0,0	17,2	

Legenda: Linguagem natural (LN); Numérica (N); Desenhos (D); Tabelas (T); Diagramas ou Esquemas (DE); Sincopada (S); Idiossincrática (I); Alfanumérica (A).

Pela análise da Tabela 15 é possível observar que a representação utilizada pelos alunos em tarefas cujo objetivo é indicar e justificar procedimentos relativos à resolução de equações é quase sempre a mesma, dividindo-se apenas em três tipos: linguagem natural, linguagem pré-simbólica sincopada e linguagem simbólica alfanumérica.

O tipo de representação que se evidencia bastante é a linguagem natural, o que julgo ser expectável porque o objetivo destas tarefas é justificar porque a resolução de uma equação está incorreta ou explicar procedimentos de resoluções corretas. Em tarefas com estas características é habitual recorrer-se a linguagem natural para as justificações.

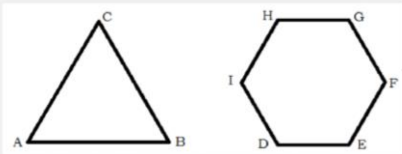
A linguagem sincopada ocorre porque os alunos, nas suas justificações de procedimentos recorrem, em simultâneo, à linguagem natural e linguagem numérica. Por fim, a linguagem simbólica alfanumérica surge quando os alunos resolvem a equação para justificar que a resolução apresentada está certa ou errada de acordo com o resultado por si obtido.

Posto isto, em tarefas sobre justificação de procedimentos na resolução de equações, o tipo de representação mais utilizado é a linguagem natural, seguida da linguagem simbólica alfanumérica e, por fim, a linguagem pré-simbólica sincopada.

5.3 Resolução de problemas envolvendo equações

Para a análise das justificações presentes em problemas envolvendo equações debruçemo-nos primeiramente na tarefa 4 (Figura 33) proposta na 9.ª aula da intervenção (Anexo 13: 12 de maio de 2020). que consiste num problema que poderá ser resolvido de diferentes formas, nomeadamente, através da resolução de uma equação e nas duas alíneas solicita a justificação por parte dos alunos.

Na figura estão representados um triângulo equilátero e um hexágono regular. A medida dos lados do triângulo tem mais 1cm que a dos lados do hexágono.
O João afirmou "o perímetro do hexágono é duplo do perímetro do triângulo".

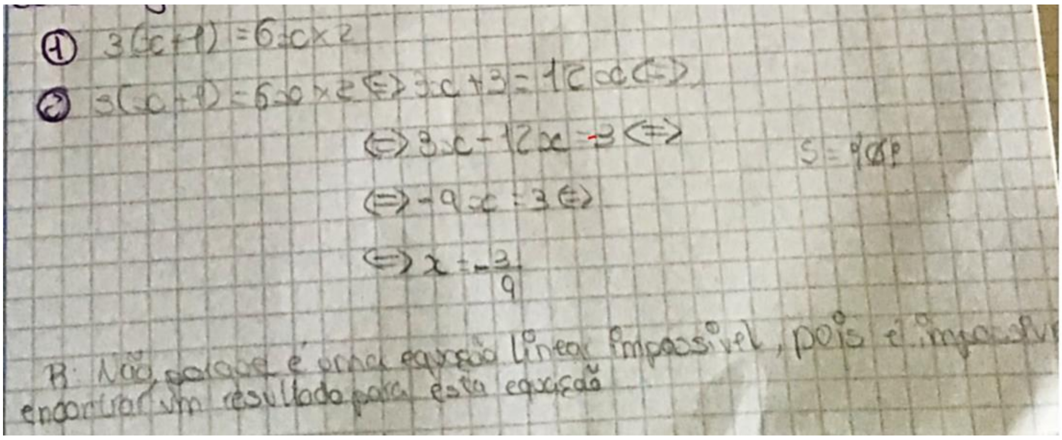


a) Traduza a afirmação do João por meio de uma equação. Justifique.

b) Resolva a equação da alínea a) e diga se a afirmação do João pode ser verdadeira, justificando.

Figura 33: Enunciado da tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção.

Na resolução da aluna A (Figura 34) verifica-se que a mesma revelou algumas dificuldades na interpretação do enunciado da tarefa, tendo escrito uma equação que não traduz corretamente o problema. Verifica-se que a multiplicação por dois deveria ter sido efetuada sobre o valor do perímetro do triângulo e não do hexágono, ou seja, deveria ser $2 \times 3(x+1)$. Além disso, a aluna obtém uma solução negativa e conclui que a equação é impossível, indicando mesmo o conjunto solução como o conjunto vazio (embora expresso erradamente). O conjunto solução apresentado pela aluna poderá ter a ver com interpretação da solução à luz do enunciado, é algo que fica em aberto e que seria interessante ter discutido com a aluna no momento de trabalho autónomo, caso este fosse presencial. Neste sentido, a aluna apoia-se em procedimentos simbólicos, no entanto, atribui um significado incorreto aos símbolos matemáticos, pelo que, apresenta uma justificação com nível de complexidade 1. Em termos de representação, a aluna apresenta e resolve a equação recorrendo à notação alfanumérica e ainda apresenta uma justificação em linguagem natural.



① $3(x+1) = 6x \times 2$

② $3(x+1) = 6x \times 2 \Leftrightarrow 3x + 3 = 12x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 12x = -3 \Leftrightarrow$ $S = \{\emptyset\}$

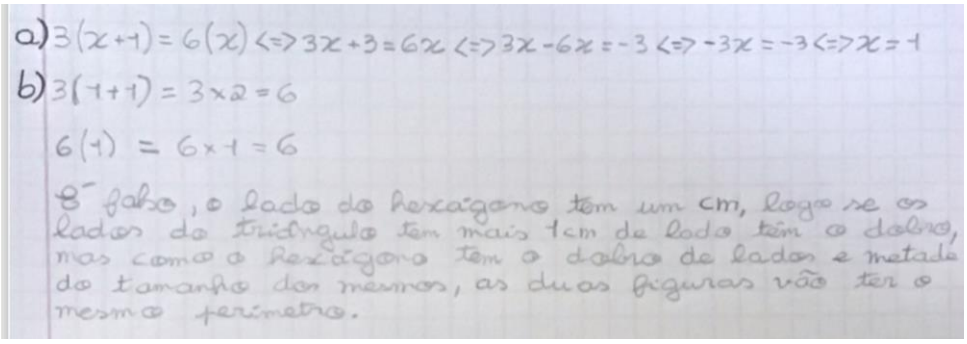
$\Leftrightarrow -9x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{9}$

R: Não porque é uma equação linear impossível, pois é impossível encontrar um resultado para esta equação

Figura 34: Resolução da aluna A relativa à tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção.

O aluno N apresenta uma resolução (Figura 35) onde, à semelhança da aluna A, não apresenta uma equação que traduza o problema, no entanto, o aluno obtém uma solução e retira as suas conclusões consoante o valor encontrado. Assim, este baseou-se no caso particular encontrado para a sua justificação, apresentando um nível de complexidade 2. Em termos de representação, o aluno resolve a equação recorrendo à representação simbólica alfanumérica, no entanto, justifica o valor obtido recorrendo à linguagem natural.



a) $3(x+1) = 6(x) \Leftrightarrow 3x+3 = 6x \Leftrightarrow 3x - 6x = -3 \Leftrightarrow -3x = -3 \Leftrightarrow x = 1$

b) $3(1+1) = 3 \times 2 = 6$

$6(1) = 6 \times 1 = 6$

É falso, o lado do hexágono tem um cm, logo se os lados do triângulo tem mais 1cm de lado tem o dobro, mas como o hexágono tem o dobro de lados e metade do tamanho dos mesmos, as duas figuras vão ter o mesmo perímetro.

Figura 35: Resolução do aluno N relativa à tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção.

O aluno B, na sua resolução da tarefa 4 (Figura 36), recorre à linguagem natural para justificar as expressões que representam os perímetros das duas figuras geométricas, apesar da expressão do perímetro do hexágono estar incorreta, este apresenta um raciocínio que recorre à coerência lógica, ou seja, apresenta uma justificação com nível de complexidade 3A. Porém, na resolução da equação o aluno revela muitas dificuldades, recorrendo a procedimentos simbólicos, mas sem atribuição de significado a essa manipulação simbólica e, portanto, não aplica a propriedade distributiva ou aplica incorretamente as regras práticas. Assim, neste aspeto, revela uma justificação com nível de complexidade 1 e recorre à representação simbólica alfanumérica.

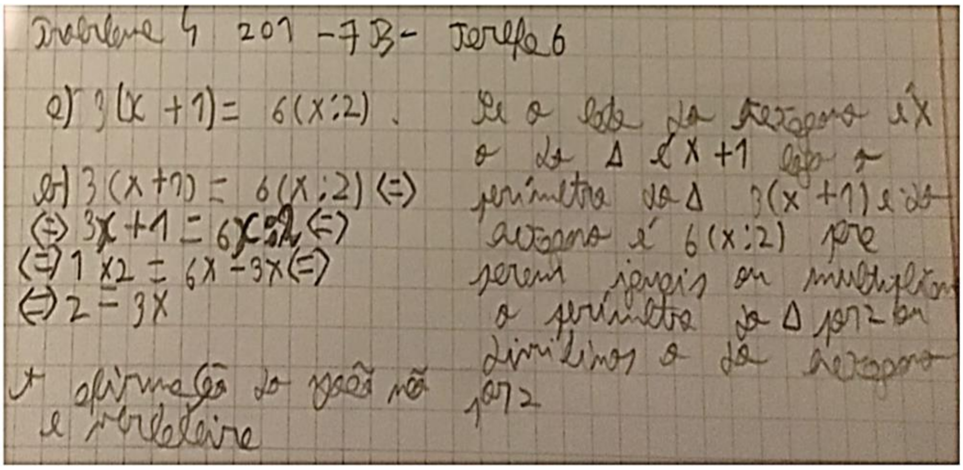


Figura 36: Resolução do aluno B relativa à tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção.

Na resolução do aluno J, relativa à tarefa 4 (Figura 37), o mesmo define a incógnita, indica as expressões algébricas que representam os perímetros de cada uma das figuras geométricas, escreve a equação que traduz o problema e resolve-a de forma correta, no entanto, este não justifica de forma completa o resultado obtido e não apresenta uma resposta ao problema, apenas indicando “Não pode ser.”. Assim, o aluno recorre aos procedimentos matemáticos habituais mas de forma incompleta, pelo que apresenta uma justificação com nível de complexidade 3B. O tipo de representação utilizado foi, mais uma vez, simbólica alfanumérica.

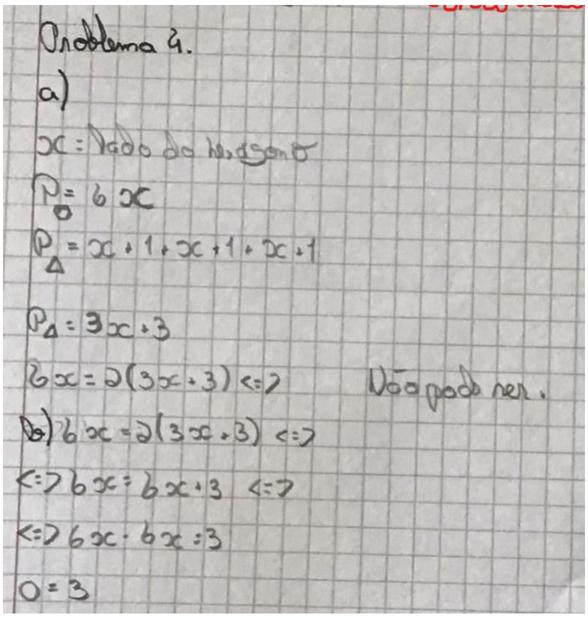


Figura 37: Resolução do aluno J relativa à tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção.

Por fim, apresento a resolução da aluna G (Figura 38) que recorre aos procedimentos matemáticos necessários à completa resolução de um problema, pelo que apresenta uma justificação com nível de complexidade 3C. Em termos de representação, a aluna recorre a diversas tipologias, começa por recorrer à linguagem sincopada quando justifica a definição da incógnita e as expressões dos perímetros das figuras e, além disso, ainda apresenta as medidas dos lados das figuras em função de x recorrendo a desenhos. Posteriormente, resolve a equação recorrendo à representação simbólica alfanumérica e, por fim, apresenta a resposta ao problema e justifica-a recorrendo à linguagem natural.

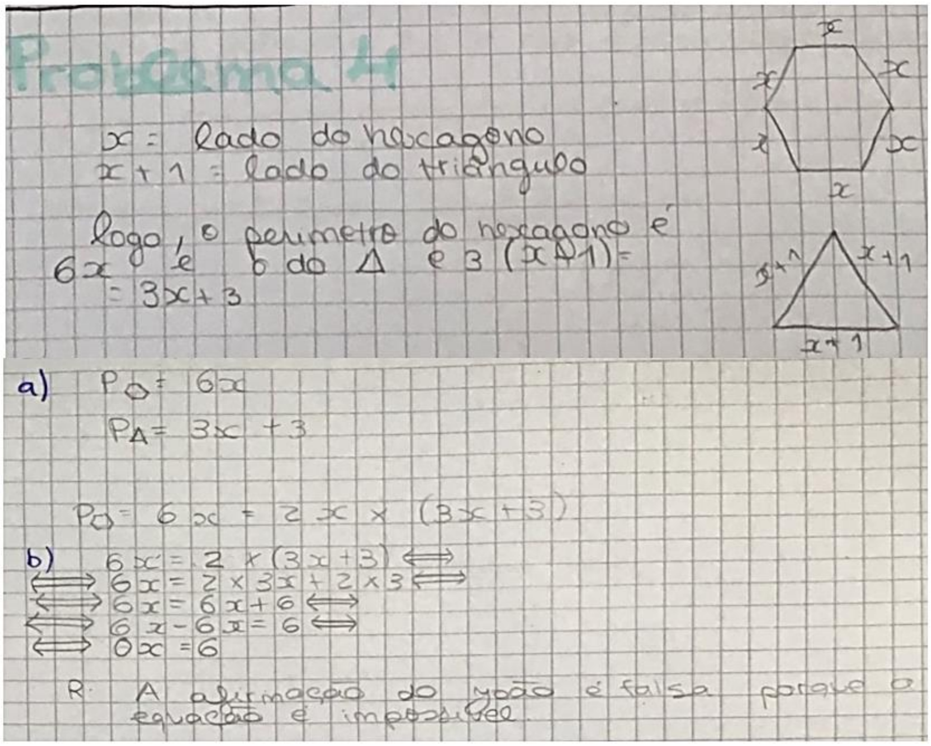
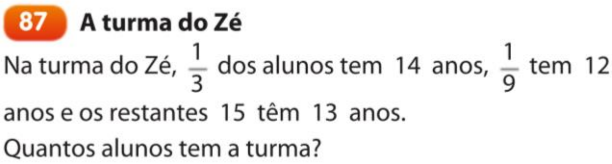


Figura 38: Resolução da aluna G relativa à tarefa 4 proposta na 9.ª aula da intervenção.

Debruçar-nos-emos agora na tarefa 87 do manual (Passos & Correia, 2019) (Figura 39) proposta na 10.ª aula da intervenção (Anexo 14: 15 de maio de 2020).


87 A turma do Zé

Na turma do Zé, $\frac{1}{3}$ dos alunos tem 14 anos, $\frac{1}{9}$ tem 12 anos e os restantes 15 têm 13 anos.

Quantos alunos tem a turma?

Figura 39: Enunciado da tarefa 87 do manual (Passos & Correia, 2019).

A aluna O na sua resolução relativa à tarefa 87 (Figura 40) recorre à representação simbólica alfanumérica, no entanto, apresenta algumas dificuldades relativas aos procedimentos matemáticos utilizados na resolução de equações, na medida em que adiciona valores de natureza distinta como o número de alunos com 13 anos e o próprio 13 que representa a idade, bem como outros aspetos onde evidencia alguns problemas na atribuição de significado aos símbolos. Além disso, retira uma conclusão acerca do número de alunos da turma quando a resolução da equação ainda não está terminada. A aluna O apresenta uma justificação com nível de complexidade 1.

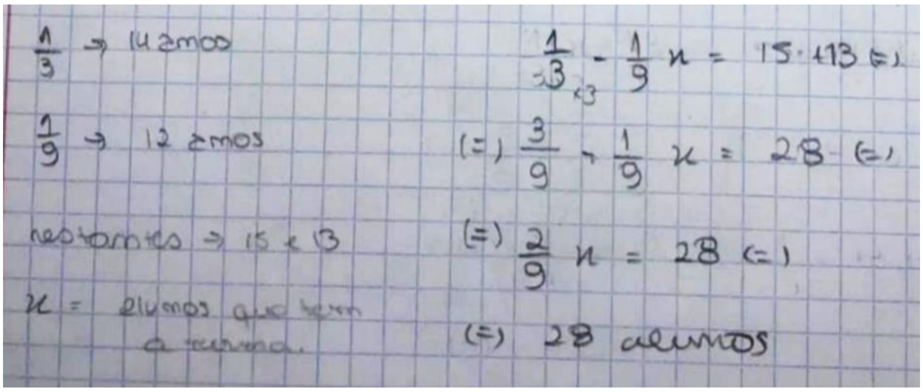


Figura 40: Resolução da aluna O relativa à tarefa 87 do manual (Passos & Correia, 2019).

À semelhança do que já tinha ocorrido em resoluções anteriores, na resolução do aluno J (Figura 41) podemos observar que este define a incógnita ainda que de forma bastante incompleta, escreve uma equação que traduz o problema e resolve-a de forma correta, no entanto, não apresenta a resposta, pelo que não justifica o que representa o valor obtido. Apresenta assim uma justificação com nível de complexidade 3B. O tipo de representação utilizado foi simbólica alfanumérica.

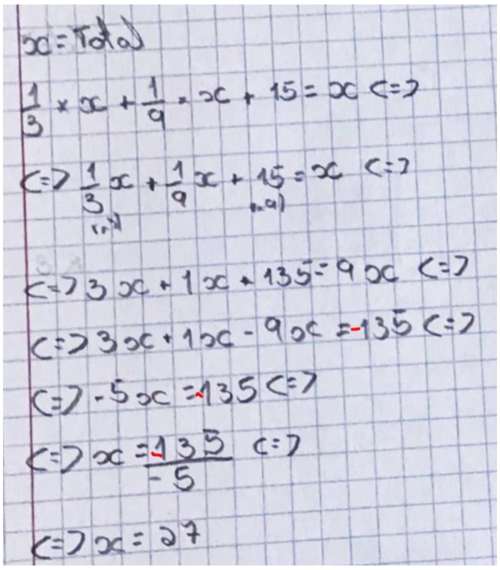


Figura 41: Resolução do aluno J relativa à tarefa 87 do manual (Passos & Correia, 2019).

O aluno K (Figura 42) apresenta uma estratégia distinta de todos os outros, procurando a parte da turma que representa os alunos com 13 anos e a partir disso descobrir o número total de alunos. Apesar de, por vezes, evidenciar alguns erros em termos de representação como $\frac{1}{9} = 15 \div 5$ em vez de $\frac{1}{9}y = 15 \div 5$ sendo y o número total de alunos na turma, a sua justificação apoia-se em transformações de um objeto que se considera como representativo de uma classe de objetos, pelo que apresenta um nível de complexidade 3B. O tipo de representação utilizado é simbólica alfanumérica.

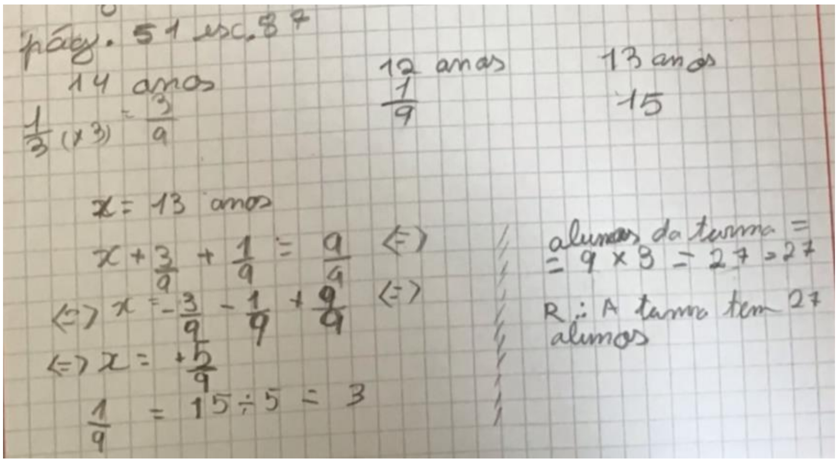


Figura 42: Resolução do aluno K relativa à tarefa 87 do manual (Passos & Correia, 2019).

O aluno H apresenta uma resolução (Figura 43) onde define a incógnita, escreve a equação que traduz o problema, resolve-a e apresenta a resposta, pelo que, se apoia nos procedimentos matemáticos habituais na resolução de problemas, apresentando uma justificação com nível de complexidade 3C. Em termos de representação, este recorre à linguagem simbólica alfanumérica.

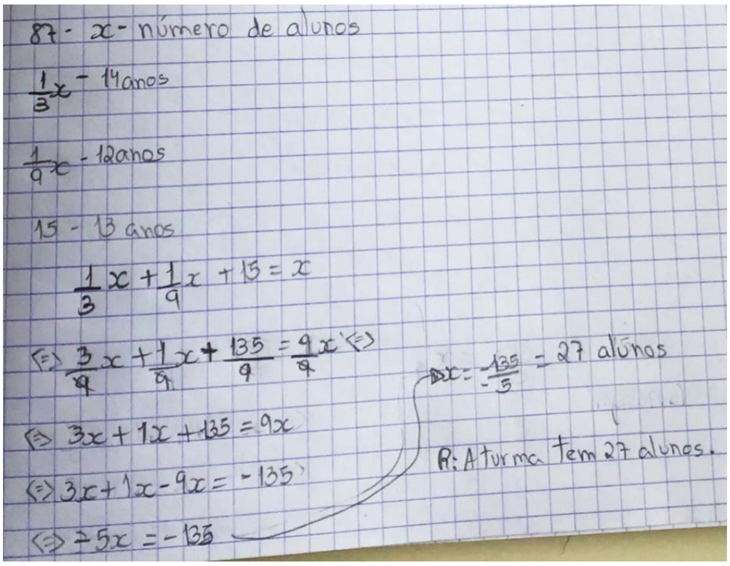


Figura 43: Resolução do aluno H relativa à tarefa 87 do manual (Passos & Correia, 2019).

Debruçar-nos-emos, por fim, na tarefa 105 do manual (Passos & Correia, 2019) (Figura 44) proposta na 11.ª e última aula da intervenção (Anexo 15: 19 de maio de 2020).

105 Os animais da quinta

Na quinta dos avós do Jacinto há y porcos e há mais 6 patos do que porcos.

Sabendo que os porcos e os patos têm ao todo 180 patas, determina quantos patos há na quinta.

Figura 44: Enunciado da tarefa 105 do manual (Passos & Correia, 2019).

A aluna C, na sua resolução relativa à tarefa 105 (Figura 45), recorre à linguagem simbólica alfanumérica, no entanto, apresenta alguns erros nessa simbolização. Além disso, a expressão algébrica que apresenta não é justificada e não traduz o problema. Por fim, apresenta o valor 30, sem qualquer justificação de como chegou a este. Esta aluna apoia-se em procedimentos simbólicos, sem atribuição de significado à manipulação simbólica pelo que revela um nível de complexidade 1 na sua justificação.

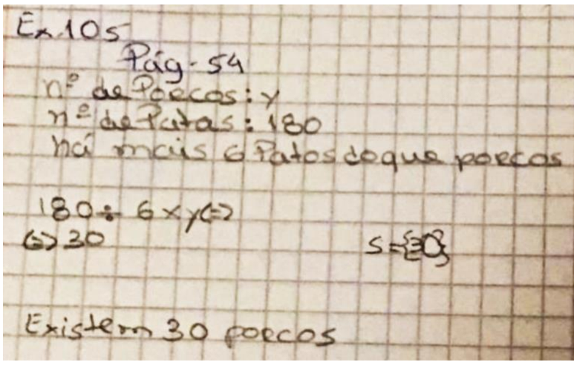


Figura 45: Resolução da aluna C relativa à tarefa 105 do manual (Passos & Correia, 2019).

O aluno F na sua resolução relativa à tarefa 105 (Figura 46) escreve uma equação que não traduz o problema descrito, pelo que este apoia-se em procedimentos simbólicos, mas não atende ao significado dos mesmos, revelando uma justificação de nível de complexidade 1. Em termos de representação recorre à linguagem simbólica alfanumérica.

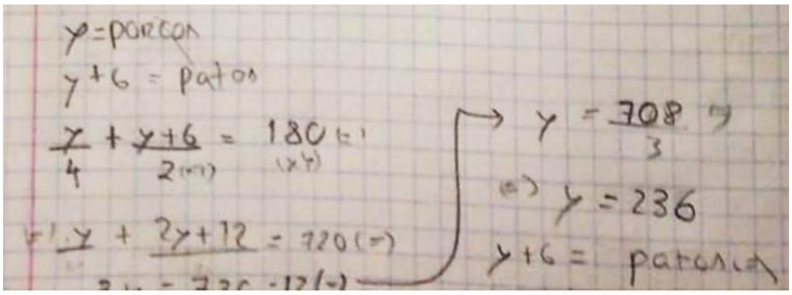
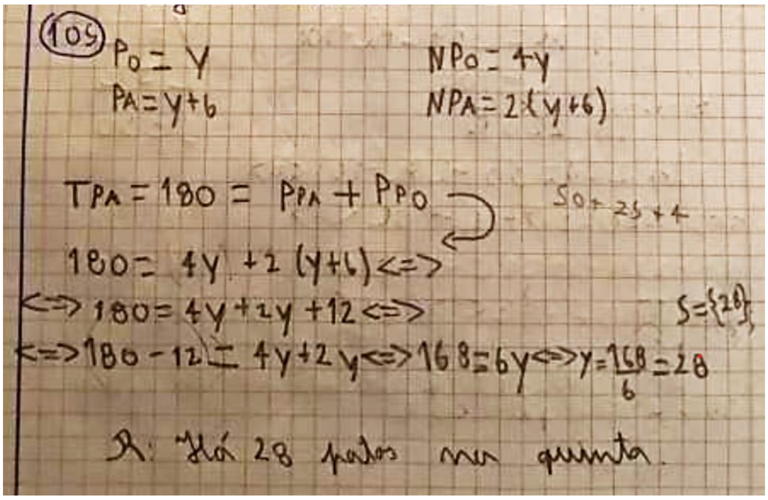


Figura 46: Resolução do aluno F relativa à tarefa 105 do manual (Passos & Correia, 2019).

O aluno D na sua resolução relativa à tarefa 105 (Figura 47) resolve o problema recorrendo aos procedimentos matemáticos habituais, no entanto, quando apresenta a resposta não atende ao significado da incógnita estabelecida. Apesar do facto mencionado, a justificação tem um nível de complexidade 3C, visto que esse erro na resposta pode ter sido distração, uma vez que o aluno resolve toda a questão corretamente. O aluno recorre à linguagem simbólica alfanumérica.



105 $P_O = y$ $\quad NP_O = 4y$

$P_A = y+6$ $\quad NP_A = 2(y+6)$

$T_{PA} = 180 = P_{PA} + P_{PO}$

$180 = 4y + 2(y+6) \Leftrightarrow$

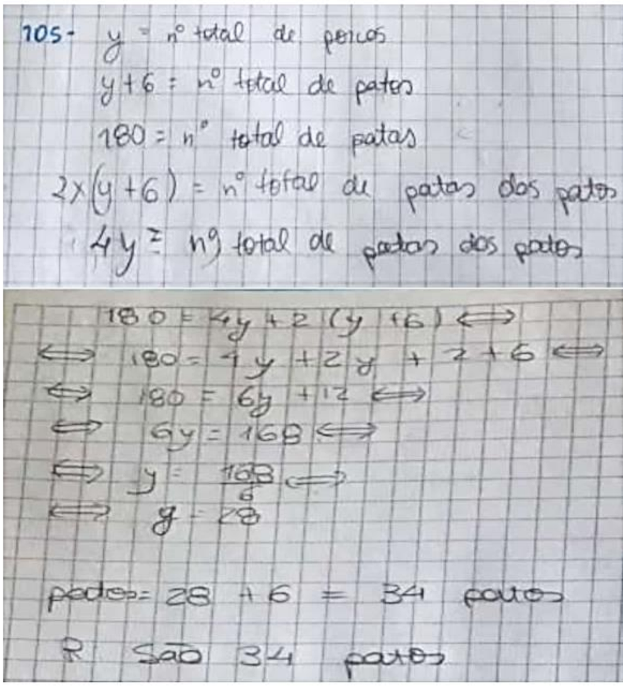
$\Leftrightarrow 180 = 4y + 2y + 12 \Leftrightarrow$ $\quad S=\{28\}$

$\Leftrightarrow 180 - 12 = 4y + 2y \Leftrightarrow 168 = 6y \Leftrightarrow y = \frac{168}{6} = 28$

R: Há 28 patos na quinta.

Figura 47: Resolução do aluno D relativa à tarefa 105 do manual (Passos & Correia, 2019).

Por fim, a aluna G na sua resolução (Figura 48) recorre aos procedimentos matemáticos habituais na resolução de problemas envolvendo equações. Desta feita, a aluna apresenta uma justificação com nível de complexidade 3C. Em termos de representação a aluna recorre a duas, a primeira pré-simbólica sincopada quando define a incógnita e quando apresenta as expressões algébricas que representam o número de patos, porcos e patas respetivas. Seguidamente, resolve a equação recorrendo à linguagem simbólica alfanumérica.



105- y = nº total de porcos

$y+6$ = nº total de patos

180 = nº total de patas

$2\times(y+6)$ = nº total de patas dos patos

$4y$ = nº total de patas dos patos

$180 = 4y + 2(y+6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180 = 4y + 2y + 2+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180 = 6y + 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6y = 168 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{168}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 28$

patos = 28 + 6 = 34 patos

R São 34 patos

Figura 48: Resolução da aluna G relativa à tarefa 105 da página 54 do manual (Passos & Correia, 2019).

De seguida apresento a Tabela 16 que indica o número de vezes que cada nível de complexidade surgiu nas resoluções dos alunos nas tarefas de resolução de problemas envolvendo equações selecionadas. Além disso, apresento a percentagem média de vezes que cada nível de complexidade surge nas justificações presentes neste tipo de tarefas.

Tabela 16: Número de resoluções onde surgiram justificações dos vários Níveis de complexidade em tarefas de resolução de resolução de problemas envolvendo equações.

Aula	Tarefa	Níveis de complexidade						N.º total de resoluções
		0	1	2	3A	3B	3C	
9	4	0	4	1	1	3	2	10
10	87	0	2	0	0	4	4	10
11	105	2	3	0	0	2	6	13
Percentagem média (%)		5,1	27,7	3,3	3,3	28,5	35,4	

Analisando a Tabela 16 conseguimos observar que o nível de complexidade 3A surge pouco em tarefas de resolução de problemas envolvendo equações. Verifica-se ainda que, os níveis de complexidade das justificações dos alunos variam razoavelmente. É evidente o aumento de resoluções com justificações cujo nível de complexidade é 3C o que é de salientar, visto que revela uma evolução por parte dos alunos em três aulas onde os problemas envolvendo equações foram trabalhados. Consequentemente, também na resolução de equações foram-se dissipando dificuldades ao nível da manipulação algébrica e aplicação das regras práticas ou princípios de equivalência. As justificações com nível de complexidade 3C são as que mais emergem porque os alunos recorrem aos procedimentos matemáticos habituais na resolução de problemas envolvendo equações, procedimentos esses que trabalhei em aula na introdução à resolução de problemas envolvendo equações.

Pela percentagem média de vezes que cada nível de complexidade surge nas justificações matemáticas verifica-se que o nível de complexidade 3C é predominante, logo seguido do nível 3B. O nível de complexidade 0 e 3A de justificação ocorrem muito pouco nas resoluções dos alunos. Neste tipo de tarefas também o nível de complexidade 2 surgiu poucas vezes nas resoluções dos alunos. É de referir também que o nível de complexidade 1 tem uma incidência de 27,7 % que é ainda considerável, revelando que apesar da melhoria em justificar matematicamente demonstrada, este processo do raciocínio matemático deve continuar a ser trabalhado de modo a verificar melhorias ainda mais evidentes.

Apresento, de seguida, a Tabela 17 onde se encontra o número de vezes em que cada tipo de representação surge nas resoluções dos alunos em tarefas de resolução de problemas envolvendo equações. Além disso, apresento também a percentagem média de vezes que cada tipo de representação surgiu nas tarefas selecionadas.

Tabela 17: Tipos de representação que surgiram nas produções dos alunos em tarefas de resolução de problemas envolvendo equações.

Aula	Tarefa	Tipos de Representação								N.º total de resoluções
		LN	N	Icónica			Pré-simbólica	Simbólica		
				D	T	DE	S	I	A	
9	4	7	0	1	0	0	2	0	10	10
10	87	0	0	0	0	0	0	0	10	10
11	105	0	2	0	0	0	2	0	11	13
Percentagem média (%)		23,3	5,1	3,3	0,0	0,0	11,8	0,0	94,9	

Legenda: Linguagem natural (LN); Numérica (N); Desenhos (D); Tabelas (T); Diagramas ou Esquemas (DE); Sincopada (S); Idiossincrática (I); Alfanumérica (A).

Analisando a Tabela 17 verificamos que a tipologia de representação que mais surge e que é expectável é a representação simbólica alfanumérica, isto porque, a resolução de equações a isso implica. As restantes tipologias que emergiram serviram sempre de complemento a esta representação, ou para dar a resposta, ou para justificar a escrita da equação que traduz o problema etc. Nenhum aluno recorreu a tabelas ou diagramas e esquemas para apresentar as suas justificações.

Em termos dos conhecimentos matemáticos evidenciados, na resolução de problemas envolvendo equações, alguns alunos resistem em apresentar a definição da incógnita ou a resposta ao problema. Além disso, existem também, por vezes, dificuldades na escrita da equação quando a interpretação do enunciado não é efetuada da forma mais correta.

Capítulo 6 Conclusão

No presente capítulo procurarei sintetizar o estudo realizado, relembrando os objetivos do mesmo e, ainda, dar resposta às questões de investigação levantadas no Capítulo 1. Terminarei o capítulo com uma análise reflexiva relativa à elaboração deste estudo e às aprendizagens que o mesmo me possibilitou adquirir e que procurarei levar para a minha atividade profissional futura.

6.1 Síntese do estudo

Os principais objetivos do estudo realizado foram analisar as justificações matemáticas dos alunos que emergiram nesta unidade didática, as dificuldades que os mesmos revelaram neste processo e, ainda, a forma como expressam essas mesmas justificações, ou seja, as representações às quais recorrem. Além disso, realizei também uma breve reflexão relativamente às dificuldades que surgiram nos conteúdos matemáticos envolvidos. Para melhor atingir os objetivos estabelecidos elaborei duas questões de investigação às quais procurei dar resposta com a recolha e tratamento de dados efetuada. As questões de investigação levantadas foram as seguintes: *i. Que tipo de justificações matemáticas são realizadas pelos alunos?; ii. Que dificuldades revelam os alunos neste processo do raciocínio matemático e qual a sua origem?.*

O estudo ao qual se refere este relatório foi efetuado numa turma do 7.º ano de escolaridade do Colégio Militar. A intervenção letiva ocorreu no capítulo de Equações algébricas. Devido à pandemia COVID-19 que se instalou no mundo, a intervenção ocorreu em dois grandes momentos, o primeiro correspondeu a duas aulas lecionadas presencialmente e o segundo a nove aulas lecionadas à distância. Com a forçada alteração na metodologia de ensino, a planificação da unidade teve igualmente de ser adaptada. As aulas presenciais tiveram uma abordagem de ensino exploratório, onde as mesmas foram organizadas em quatro grandes momentos, introdução da tarefa, trabalho autónomo, discussão coletiva e sistematização. Já as aulas lecionadas à distância não assumiram um ensino de natureza exploratória, isto porque, esta metodologia requer um apoio por parte do professor ao trabalho autónomo dos alunos e à sistematização de ideias em grupo turma que se torna difícil quando estamos perante um ensino à distância. Desta forma, as aulas à distância foram estruturadas em dois grandes momentos: o primeiro assíncrono, onde partilhava tarefas com os alunos que estes resolviam individualmente, e o segundo síncrono, onde discutíamos as tarefas realizadas e eram esclarecidas as dúvidas.

O principal instrumento de recolha de dados foram as produções dos alunos, tendo ficado com todas as resoluções dos mesmos relativas às tarefas propostas na unidade de Equações algébricas. Adicionalmente, recorri a notas de campo elaboradas logo após cada aula.

6.2 Conclusões do estudo

Com base na análise de dados efetuada no Capítulo 5 vou procurar responder às questões do estudo.

i. *Que tipo de justificações matemáticas são realizadas pelos alunos?*

A organização dos dados foi efetuada por tipologia de tarefa. As primeiras resoluções analisadas foram relativas a tarefas de exploração que visavam a generalização. Nestas resoluções três níveis de complexidade se destacam relativamente aos restantes. Em primeiro lugar surge o nível 3A, ou seja, evidencia-se recurso a coerência lógica nas justificações presentes em tarefas com as características mencionadas. Logo de seguida surge o nível 0 de complexidade, que revela alguma dificuldade em justificar em tarefas de exploração que visavam a generalização e, por fim, o nível de complexidade 3C que também apresenta uma incidência considerável. É curioso observar que dois dos níveis que mais surgem estão em polos opostos de complexidade, este facto pode confirmar a heterogeneidade da turma alvo do estudo, e as dificuldades iniciais demonstradas por alguns alunos, no que diz respeito a este processo de raciocínio matemático.

Relativamente a tarefas sobre equações, as mesmas não eram de resolução direta de equações. O seu objetivo era, antes, a justificação de procedimentos efetuados em resoluções de equações já apresentadas ou indicar se uma determinada equação estava ou não corretamente resolvida. Tendo em conta os objetivos das tarefas propostas, os alunos ou se apoiam nos valores efetivos da equação em questão (por exemplo, “passou o -1 do

1.º para o 2.º membro e trocou o sinal") ou expressaram-se de uma forma mais generalizada (por exemplo, "colocou no 1.º membro os termos com incógnita e no 2.º membro os termos sem incógnita"; "Aplicou as regras práticas"), assim as suas justificações foram classificadas com nível de complexidade 2 ou 3C, respetivamente. Os dois níveis de complexidade mencionados foram os que mais emergiram em tarefas deste tipo. Também os níveis de complexidade 1 e 3B surgiram em algumas justificações, o segundo nos casos em que os alunos se focaram nos aspetos gerais da equação, no entanto, não evocaram explicitamente as propriedades ou procedimentos matemáticos aos quais recorreram. Os níveis de complexidade 0 e 3A tiveram pouca incidência em tarefas de resolução de equações.

Por fim, nos problemas envolvendo equações, os alunos recorreram predominantemente a justificações com nível de complexidade 3C, isto porque recorreram aos procedimentos matemáticos habituais na resolução de problemas envolvendo equações, procedimentos esses trabalhados na aula de introdução à resolução de problemas envolvendo equações. Para além das justificações com nível de complexidade 3C, surgiu também com uma incidência considerável o nível de complexidade 3B e, logo de seguida, o nível de complexidade 1. O surgimento de algumas justificações com nível de complexidade 1 revela que, apesar da melhoria da turma, na generalidade, em justificar matematicamente, principalmente em tarefas deste tipo, o trabalho neste processo do raciocínio matemático não está terminado e deve continuar a ser incentivado.

Tendo em conta os resultados obtidos, é possível afirmar que, na generalidade, o nível de complexidade de justificações que mais emerge nas produções dos alunos no capítulo de Equações algébricas é o nível de complexidade 3C. Podemos então concluir que, segundo este estudo, as justificações mais utilizadas pelos alunos são as que se apoiam em propriedades ou procedimentos matemáticos, definições, hipóteses ou teoremas. Os restantes níveis de complexidade têm uma incidência bastante variável consoante a tipologia de tarefa que se esteja a considerar, por exemplo, o nível de complexidade 3A ocorre bastante em tarefas de exploração que visavam a generalização, porém, o mesmo já não se verifica em tarefas de resolução de equações ou em problemas envolvendo equações. O nível 2 de complexidade surge muito em tarefas de resolução de equações, mas o mesmo já não acontece nas outras tipologias de tarefas. Por fim, em problemas envolvendo equações, os níveis de complexidade 1 e 3B têm bastante incidência, mas o mesmo não é observado nas restantes tipologias de tarefas analisadas.

Os resultados obtidos diferem um pouco relativamente ao estudo realizado por Widjaja et al. (2020) que apresentei no capítulo 2. As justificações com nível 3C de complexidade que é semelhante ao nível 4 que os autores consideraram, surge apenas em 7% das resoluções no seu estudo, enquanto que, nos resultados por mim obtidos é o nível de justificação mais utilizado. As diferenças mencionadas podem decorrer também da disparidade no nível de maturidade dos participantes no estudo de Widjaja et al. (2020) e dos participantes no meu estudo, uma vez que, no primeiro, os alunos tinham uma idade compreendida entre os sete e os dez anos e no estudo por mim realizado participaram alunos com onze ou doze anos de idade.

As justificações são expressas pelos alunos nas suas resoluções recorrendo a diversas representações, pelo que, optei também por classificar as justificações analisando a representação utilizada. Os resultados obtidos relativamente a tarefas de exploração que visavam a generalização indicam que a representação mais utilizada para expressar as justificações é a linguagem natural, logo seguida da linguagem simbólica alfanumérica.

Relativamente às justificações presentes em tarefas sobre equações (tarefas que não são de resolução direta de equações), os resultados obtidos evidenciam que a representação mais utilizada é a linguagem natural, isto porque os alunos recorrem à mesma para justificar os procedimentos utilizados na resolução de uma equação ou para justificar que a mesma está mal resolvida. Seguida desta representação, surge a linguagem simbólica alfanumérica, que ocorre quando os alunos recorrem à resolução da equação para mostrar que a resolução apresentada está incorreta.

Por fim, temos as justificações presentes em problemas envolvendo equações. Nestas justificações a representação predominante é a simbólica alfanumérica, algo que é expectável, visto que todas estas tarefas implicam a resolução de uma equação. As restantes tipologias de representação, principalmente a linguagem pré-simbólica sincopada e a linguagem natural, surgem sempre como complemento à justificação recorrendo à linguagem simbólica alfanumérica, ou para dar a resposta ou para justificar a equação que traduz o problema etc.

De um modo geral, os tipos de representação mais utilizados pelos alunos nas justificações presentes em tarefas da unidade de Equações Algébricas é a linguagem natural ou a linguagem simbólica alfanumérica, também dependendo do tipo de tarefa ao qual nos estamos a referir e o objetivo da mesma.

ii. *Que dificuldades revelam os alunos neste processo do raciocínio matemático e qual a sua origem?*

As principais dificuldades evidenciadas pelos alunos neste estudo foram a resistência em justificar quando para tal era necessário mais do que meros cálculos, e a justificação em tarefas de exploração que visavam a generalização. Além das dificuldades em justificar matematicamente mencionadas, foram ainda reveladas algumas relativas aos seus conhecimentos matemáticos.

Nas resoluções da primeira tipologia de tarefa analisada (tarefas de exploração que visavam a generalização) é bem evidente que, quando se pediu uma justificação mais elaborada (exemplo disso é a tarefa 1.2 analisada), o nível de complexidade 0 surgiu bastante. Ou seja, quando numa tarefa se requer uma justificação não recorrendo apenas a cálculos, sendo necessário haver uma explicitação dos procedimentos efetuados recorrendo a linguagem natural ou outra diferente de linguagem numérica ou simbólica alfanumérica, os alunos resistiam em apresentá-la.

Nas duas primeiras aulas da intervenção, onde foi possível, aquando do trabalho autónomo, incentivar à justificação porque nos encontrávamos em regime de ensino presencial, questionava os alunos no sentido de apelar à justificação dizendo: "como conclui isso?", "como chegou a esse resultado?", ao qual muitas vezes responderam "é preciso escrever isso?". O questionamento é uma das ações do professor que Mata-Pereira e Ponte (2018) evidenciam como sendo essencial à promoção da justificação matemática. Ao recorrer ao questionamento, alguns alunos refletiram mais relativamente às tarefas que estavam a realizar e apresentavam justificações mais elaboradas do que inicialmente exibiram.

As tarefas de exploração que visam a generalização estiveram na base do trabalho das duas primeiras aulas. Estas tarefas eram maioritariamente sustentadas por coerência lógica e, ocorreu ainda, em muitas resoluções não estar presente qualquer justificação (29,2% das resoluções não apresentaram justificação). Ou seja, inicialmente houve bastantes dificuldades com este processo do raciocínio matemático. No entanto, a incidência de resoluções sem justificações em tarefas de resolução de equações e em problemas envolvendo equações foi bastante reduzida. É de realçar a considerável diminuição de resoluções sem justificações apresentadas pelos alunos que foi registada ao longo da intervenção.

Foi notória uma melhoria em justificar matematicamente por parte dos alunos isto porque, as justificações que se focam em aspetos gerais de uma situação particular, ou seja, o penúltimo nível de complexidade de justificações mais elevado, foi surgindo cada vez mais nas resoluções dos alunos ao longo da intervenção, isto porque nas tarefas de exploração que visavam a generalização a incidência foi bastante reduzida, em tarefas de resolução de equações foi praticamente o quíntuplo e terminou nos problemas envolvendo equações com uma incidência bastante mais elevada. As justificações que se apoiam em procedimentos matemáticos têm uma incidência considerável em todas as tipologias de tarefas. É de realçar, também, que a incidência do nível de complexidade 1 em problemas envolvendo equações ainda surgiu algumas vezes, pelo que, apesar da notória melhoria referida, a justificação matemática deve continuar a ser trabalhada e incentivada.

Concluo assim que apesar da resistência em justificar matematicamente apresentada no início da Unidade Didática, esta apenas se continuou a verificar em casos esporádicos, tendo sido notória uma evolução ao longo da intervenção. Além disso, o nível de complexidade das justificações matemáticas dos alunos varia consideravelmente consoante a tarefa que seja proposta e o tipo de justificação que é solicitada na mesma. Ou seja, quanto mais elaborada for a justificação que a tarefa requer para fundamentar os procedimentos efetuados na sua resolução, mais se verifica uma diminuição nos níveis de complexidade das justificações apresentadas pelos alunos. Assim, a possibilidade de, caso as tarefas fossem outras, os resultados serem distintos é bastante plausível.

Relativamente a problemas envolvendo equações, as três tarefas analisadas foram propostas na fase final da intervenção e em aulas consecutivas. Na primeira tarefa analisada (proposta na 9.ª aula), surgiram duas resoluções com nível de complexidade 3C, na segunda tarefa (proposta na 10.ª aula) surgiram quatro níveis de complexidade 3C e, na última tarefa analisada (proposta na 11.ª e última aula da intervenção), surgiram seis justificações com nível de complexidade 3C. Foi notória a melhoria da turma começando a emergir mais justificações com nível de complexidade 3C. Os alunos começaram, progressivamente, a recorrer aos procedimentos habituais na resolução de problemas envolvendo equações. O principal fator que eu julgo ter sido responsável por estes resultados, é o facto de eu ter proposto tarefas deste género desde cedo na unidade cujo grau de dificuldade é superior relativamente às demais e terem sido uma constante ao longo de toda a intervenção.

A este respeito é de notar que no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) os problemas envolvendo equações algébricas surge como o último tópico a ser lecionado, pelo que, se este documento fosse tomado à letra, apenas seriam propostas tarefas com estas características no final da unidade. No entanto, devido aos resultados do presente estudo, julgo que a opção tomada de incorporar este tópico ao longo de toda a unidade permitiu aos alunos a dissipação de dificuldades associadas a este tipo de tarefas.

Além das dificuldades em justificar matematicamente também surgiram outras que se prendem com os conhecimentos matemáticos que a unidade das equações algébricas requer de outros tópicos matemáticos. Algumas das principais dificuldades que emergiram foram relativas à linguagem algébrica, nomeadamente na correta apresentação do termo geral de uma sucessão ou na simplificação de expressões algébricas que assumem um papel essencial na resolução de equações. Ainda na simplificação das expressões algébricas, estas fizeram emergir uma dificuldade na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta última dificuldade mencionada foi também evidenciada por Ponte, Branco e Matos (2009) como comum na resolução de equações do 1.º grau.

Outras dificuldades mencionadas por Ponte, Branco e Matos (2009) que apresentei no Capítulo 2 (Tabela 3) foram comuns ao longo da intervenção, tais como: adição de termos que não são semelhantes; adição incorreta de termos semelhantes; adição incorreta de termos não semelhantes; transposição incorreta de termos; redistribuição; conclusão incorreta da resolução da equação.

Também na resolução de problemas envolvendo equações surgiram dificuldades que se foram dissipando ao longo da unidade, como a resistência em apresentar a definição da incógnita ou a resposta ao problema. Além disso, existem também, por vezes, dificuldades na escrita da equação quando a interpretação do enunciado não é efetuada da forma mais correta.

6.3 Reflexão final

Na presente secção reflito sobre o estudo realizado, fazendo uma retrospetiva do mesmo, e pondero sobre as aprendizagens que este me permitiu adquirir, aprendizagens essas que pretendo levar para a minha vida profissional futura.

Enquanto aluna, sempre considerei que as justificações matemáticas se baseavam em cálculos, tal como o consideravam muitos dos alunos alvo do estudo realizado. Na disciplina de Matemática pouca ênfase é dada a este processo do raciocínio matemático. Este estudo, e a pesquisa que envolveu o mesmo, permitiu-me perceber a importância de justificar matematicamente. Enquanto aluna do Mestrado em ensino de Matemática, considero que a justificação matemática permite ao aluno refletir sobre os processos de resolução realizados e, consequentemente, adquirir uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos envolvidos.

Não posso deixar de sublinhar que este estudo foi realizado num ano de aprendizagem para todos, no ano em que a pandemia COVID-19 fez parar o mundo e, consequentemente, parou também o normal funcionamento das escolas. Também este facto me permitiu crescer e desenvolver aprendizagens relativas às aulas à distância, desenvolver materiais 100 por cento digitais, trabalhar com plataformas que permitem reuniões online e procurar ensinar da melhor forma, embora à distância. Cada vez mais o ensino e a tecnologia estão interligados, assim sendo, esta experiência permitiu-me conhecer inúmeras ferramentas que procurarei utilizar no futuro e que enriquecem o ensino, seja ele em regime presencial ou à distância.

Fazendo uma retrospetiva das alterações realizadas à planificação da unidade que foi necessário implementar devido à situação pandémica, julgo que, apesar das aulas não terem decorrido como estava inicialmente previsto, correram bem dentro das circunstâncias e permitiram aos alunos a iniciação do trabalho com Equações, tema este por vezes problemático.

Existem algumas ações que no ensino à distância ficam dificultadas e que se tornou uma desvantagem neste regime, tais como, o apoio aquando da realização das tarefas, a interação com os alunos (Rocha et al., 2020) e o incentivo à justificação que eu pretendia ter realizado nos momentos de trabalho autónomo, de maneira que surgissem ainda mais justificações ponderadas em cada tarefa por mim solicitada. É certo que um dos desafios mais significativos associados ao ensino a distância é a promoção de processos de reflexão durante a resolução de tarefas matemáticas complexas (Rocha et al., 2020).

Porém, caso tivesse mais tempo de preparação das aulas à distância poderia ter procurado manter o ensino exploratório como tinha pensado inicialmente. Uma funcionalidade que a plataforma ZOOM (plataforma de videoconferências) oferece são as salas simultâneas que consiste na divisão dos alunos em pequenos grupos onde, em vez de estarem em grupo turma numa só sala online, são formadas diversas salas com o número de alunos que o professor pretender, além disso, os participantes dos grupos podem ser escolhidos pelo professor ou a plataforma distribui os alunos aleatoriamente. Utilizando as salas simultâneas o professor pode apresentar a tarefa no início da sessão à turma, esclarecendo o que se pretende e o tempo destinado para a sua realização, e em seguida organiza os alunos nas Salas Simultâneas. Durante o trabalho autónomo dos alunos, o professor pode circular pelas Salas Simultâneas questionando, esclarecendo e registando estratégias e descobertas ou dificuldades. No final desse trabalho, os alunos regressam à sessão principal e o professor poderá organizar uma discussão a partir das observações ou conclusões de cada grupo de alunos, a que se deve seguir uma síntese das principais ideias ou conceitos (Jacinto & Diogo, 2020). Embora esta não tivesse sido a plataforma utilizada pelo colégio onde decorreu a minha intervenção letiva, é um recurso que fico a conhecer para necessidades futuras.

Estes dois anos do curso de Mestrado em ensino de Matemática permitiram começar a moldar-me enquanto professora. Adquiri diversas práticas que pretendo implementar nas minhas aulas, tais como, aulas em quatro fases, questionamento constante aquando do apoio ao aluno sem diminuir o grau de dificuldade da tarefa a realizar, minimização dos momentos de aula expositivo e quando houver necessidade dos mesmos estar em constante interação com a turma realizando diversas questões, entre muitas outras aprendizagens que é impossível nomear aqui.

Termino este relatório feliz pelas aprendizagens que o mesmo me permitiu adquirir, mas ansiosa por muitas outras que ainda me faltam e que a vida e experiência profissional me permitirão alcançar.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Eds.), *Mathematics, teacher and children* (pp.216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bates, T. (2020, Julho 4). *What have we learned from Covid-19 about the limitations of online learning – and the implications for the fall??*. Online Learning and Distance Education Resources. Disponível em: https://www.tonybates.ca/2020/07/04/what-have-we-learned-from-covid-19-about-the-limitations-of-online-learning/

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Instituto de Educação. (2017). *Carta ética para a investigação em educação e formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Lisboa: IE (acessível em http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Colégio Militar (2019). *Projeto Educativo* 2019-2020 a 2021-2022. (acessível em https://www.colegiomilitar.pt/documentos-estruturantes/projeto-educativo/).

Colégio Militar (2016). *Projeto Educativo* 2016-2017 a 2018-2019.

DGE (2018). *Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico* (acessível em http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario).

Domingos, A. (2016). Resolução de equações do 1.º grau com recurso a applets. *Educação e Matemática*, *139-140*, 34–37.

Filloy, E. & Rojano, T., (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G., A. & Kaput, J. J. (1996). A join perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-431). Mahwah, New Jersey: LEA.

Gregório, M., & Oliveira, H. (2018). As justificações matemáticas de alunos do 5.º ano na validação de uma conjetura no estudo da igualdade de triângulos. *Boletim Online de Educação Matemática, 6*(12), 21-40. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5965/2357724x06122018021.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp.805-842). Reston, VA: NCTM.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78.

Jacinto, H., & Diogo, P. (2020). Aprender e Ensinar Matemática online: possibilidades das Salas Simultâneas. *Educação e Matemática*, *157,* 20-24.

James, C., Casas, A. & Grant, D. (2017). Using Scaffolding to Scale-up Justifications. *Mathematics Teaching in the Middle School, 22*(5), 294-301.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: Lawrence Erlbaum/NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester, Jr (Ed), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). NCTM.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8.* Reston, VA: NCTM.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Teacher's actions to promote students' justifications. *Acta Scientiae*, *20*(3), 487-505.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2016). Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 38-41). Lisboa: APM.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática* XII (pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: MEC-DGE.

Mónico, L., Alferes, V., Parreira, P., & Castro, P. (2017). A observação participante enquanto metodologia de investigação qualitativa. In Actas *Investigação Qualitativa nas Ciências Sociais*. 6º Congresso Ibero-Americano de Investigação Qualitativa (CIAIQ).. (Vol 3, pp. 724-733). Universidade de Salamanca, Salamanca (acessível em https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2017/article/view/1447).

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino* (Tese de doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nobre, S. (2018). A aprendizagem da resolução das equações do 1.º grau – uma abordagem com balanças. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 40-43). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 83-86). Lisboa: APM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 30-53.

Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics curriculum changes. In Y. Li, E. Silver & S. Li (Eds). *Transforming Mathematics Instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 173-197). Switzerland: Springer International Publishing.

Passos, I. C., & Correia, O. F. (2019). *Matemática em ação 7*. Lisboa: Raiz Editora.

Pinto, J. & Santos. L (2006). *Modelos de Avaliação das Aprendizagens.* Lisboa: Universidade Aberta

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. *Educação e Matemática*, *156*, 7–11.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, *100*, 89-96.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *4*(8), 149-170.

Otten, M., & van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education*. 6. 10.1186/s40594-019-0183-2.

Rocha, H., Oitavem, I., Viseu, F., & Palha. S. (2020). Reinvenção do ensino a distância: a inovação ao ritmo de cada professor. *Educação e Matemática*, *155*, 16-20.

Saraiva, M. J., Pereira, M. N. & Berrincha, R. I. (2010). *Sequências e expressões algébricas: aprendizagem da resolução de equações a partir de igualdades numéricas.* Projecto IMLNA – Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. Lisboa. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Sarmento, M. J. (2011). O Estudo de Caso Etnográfico em Educação. In N. Zago; M. Pinto de Carvalho; R. A. T. Vilela (Org.) *Itinerários de Pesquisa - Perspectivas Qualitativas em Sociologia da Educação* (pp. 137 – 179). Rio de Janeiro: Lamparina (2ª edição)

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268–275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 -1988 Yearbook* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Wang, X. (2015). The Literature Review of Algebra Learning: Focusing on the Contributions to Students' Difficulties. *Creative Education*, *6*, 144-153.

Widjaja, W., Vale, C., Herbert, S., Loong, E. Y-K., & Bragg, L. A. (2020). Linking comparing and contrasting, generalising and justifying: a case study of primary students' levels of justifying. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00306-w

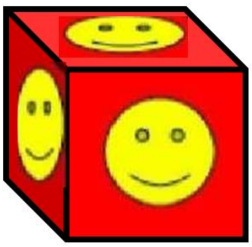
Anexos

Anexo 1: Ficha de trabalho "Expressões algébricas"

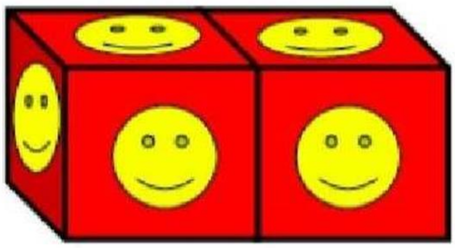
ANO LETIVO 2019/2020 DATA __/__/ 20___	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática** **NOME:** ______________________ **ANO:** ___ **TURMA**____ **Nº**_______	**AS PROFESSORAS** Anabela Candeias Sara Nunes **Tarefa nº**_______

Tarefa - "Expressões algébricas"

1. A Joana está a fazer construções com cubos e autocolantes para o seu irmão mais novo. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos e depois cola um autocolante em cada uma das faces visíveis. As imagens mostram duas construções que a Joana fez com um e com dois cubos.



Construção 1



Construção 2

1.1. Indique quantos autocolantes são usados numa construção com:

a) três cubos. Justifique.

b) quatro cubos. Justifique.

1.2. Qual o termo geral da sucessão relativa ao número de autocolantes de cada construção? Justifique.

1.3. Diga, justificando, se cada uma das expressões seguintes representa o termo geral da sucessão anterior.

a) $v_n = 6n + 2 - 2n$

b) $t_n = 8n - 4 - n + 2$

c) $z_n = 10 + 4(n - 2)$

d) $w_n = 5(n - 1) + 2n + 4$

1.4. A Joana pretende comprar autocolantes para a construção 5 mas desta vez quer também colocar autocolantes do tipo 😉.

a) A Joana pretende colar o mesmo número de autocolantes dos dois tipos nesta construção. Representando por *a* o preço, em euros, de cada autocolante ☺ e por *b* o preço, em euros, de cada autocolante 😉, escreva uma expressão algébrica que represente o valor que a Joana vai gastar nos autocolantes. Explique o seu raciocínio.

b) A Joana disse à mãe que precisava de $13a + 8b - 2a + 3b$ euros para comprar os autocolantes. Concorda com ela? Justifique.

c) Utilize a expressão que escreveu na alínea a) para determinar a quantia, em euros, gasta pela Joana na construção, se cada autocolante ☺ custar 20 cent. e cada autocolante 😉 custar 30 cent.

2. Quatro amigos compraram rebuçados para oferecer a familiares. O Gabriel comprou 4k+2 rebuçados, o Lourenço 2k+3, o Carlos 2k+2 e o Gonçalo 4k.

2.1. Sabendo que cada caixa tem *k* rebuçados, associe a cada uma das quatro figuras abaixo o número de rebuçados que cada um dos quatro amigos comprou. Explique o seu raciocínio.

Figura 1	Figura 2
	
Figura 3	**Figura 4**
	

2.2. Escreva uma expressão simplificada que represente o número total de rebuçados comprados pelos quatro amigos.

2.3. O Gabriel diz que a expressão $2k - 12(-k - 1) - (5 + 2k)$ também representa o número total de rebuçados comprados pelos quatro amigos. Terá o Gabriel razão? Justifique.

2.4. Comparando as figuras 2 e 4, qual destes amigos tem mais rebuçados? Justifique.

2.5. Comparando as figuras 2 e 3, qual destes amigos tem mais rebuçados? Justifique.

2.6. Qual o amigo que comprou um maior número de rebuçados? Explique o seu raciocínio.

Anexo 2: Ficha de trabalho n.º 1

COLÉGIO MILITAR	**COLÉGIO MILITAR**	**AS PROFESSORAS**
ANO LETIVO 2019/2020	**Matemática**	Anabela Candeias Sara Nunes
DATA __/__/ 20___	**NOME:** ______________ **ANO:** ___ **TURMA**____ **Nº**______	**Ficha de trabalho nº 1**

1. Observe as seguintes equações:

   a) $-5 + x = -10$

   b) $y + 7 + 3 = 0$

   c) $-6 = x - 1$

   1.1. Para cada uma das equações anteriores indique:

   i. a incógnita;

   ii. o 1.º e o 2.º membro;

   iii. os termos com incógnita;

   iv. os termos sem incógnita;

   v. os termos do 1.º membro;

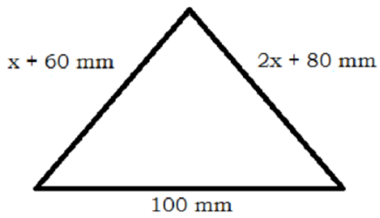
   vi. os termos do 2.º membro.

   1.2. Resolva as equações anteriores e apresente o conjunto solução.

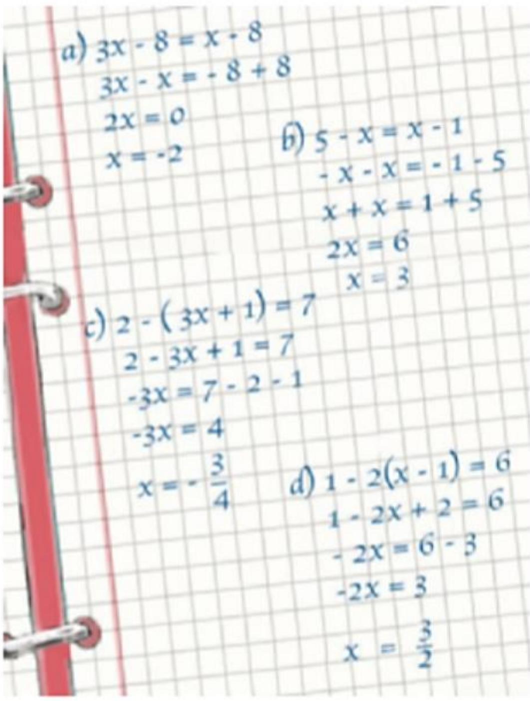
   1.3. Algumas das equações são equivalentes? Justifique.

COLÉGIO MILITAR	**COLÉGIO MILITAR**	**AS PROFESSORAS**
ANO LETIVO 2019/2020	**Matemática**	Anabela Candeias
		Sara Nunes
DATA __/__/ 20___	**NOME:** ______________________________ **ANO:** ___ **TURMA**____ **Nº**______	**Ficha de trabalho nº 2**

1. Observe o triângulo abaixo. Poderá este triângulo ser equilátero? Explique o seu raciocínio.



2. As equações seguintes foram resolvidas pela Inês.
   Verifique se a Inês cometeu alguma incorreção na resolução.
   Em caso afirmativo, assinale o que considera estar errado e explique porquê.



Anexo 4: Ficha de trabalho n.º 3

<table>
<tr><td rowspan="2">COLÉGIO MILITAR

ANO LETIVO
2019/2020

DATA __/__/ 20___</td><td>COLÉGIO MILITAR</td><td rowspan="2">AS PROFESSORAS
Anabela Candeias
Sara Nunes

Ficha de trabalho nº 3</td></tr>
<tr><td>Matemática

NOME: ________________ ANO: ___ TURMA____ Nº______</td></tr>
</table>

1. A Maria comprou três vestidos, dois pares de calças e uns sapatos. Cada vestido custou menos 10 euros do que cada par de calças e, os sapatos custaram 50 euros. Considere *c* o preço de um par de calças.

   a) Escreva a expressão que indique:

      i. o custo dos pares de calças;

      ii. o custo de um vestido;

      iii. o dinheiro que a Maria gastou no total.

   b) Sabendo que, no total, a Maria gastou 220 euros, quanto custou cada uma das peças de vestuário? Explique o seu raciocínio.

2. A turma 7.º E irá fazer uma visita de estudo.
   A diretora de turma coordenou o processo de escolha do local da visita, informando no final que:
   - ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
   - ✓ Apenas três locais receberam votos: parque de aventuras, jardim zoológico e parque aquático;
   - ✓ O jardim zoológico recebeu menos dois votos que o parque de aventuras;
   - ✓ O parque aquático recebeu o dobro dos votos do jardim zoológico.

   Onde irá ser a visita de estudo? E qual o número de votos de cada local?

Não se esqueça de apresentar e explicar o seu processo de resolução.

Anexo 5: Teste de avaliação sumativa

Qual das expressões seguintes é uma equação? *
(10 Pontos)

- $12 + x$
- $5 \times 2 + 3 = 13$
- $7x - 1 < 6$
- $8 + 3x = 14$

2

Dada a equação $3y + 4 = 5 - 7y$ podemos dizer que: *
(10 Pontos)

- 3y + 4 é o 2.º membro
- 3y e -7y são termos independentes
- 5 e -7y são termos do 2.º membro
- 4 e 5 estão no mesmo membro da equação

Quantos termos independentes tem a equação $5z - 1 = 16 - 2z + 3$? *
(10 Pontos)

- 2
- 3
- 4
- 5

4

Qual das equações tem por solução o número 3? *
(10 Pontos)

- $x + 5 = 7$
- $4x + 2 = 16$
- $5 - 2x = -1$
- $9x = 18$

5

A equação 4y - 3 = 21 é equivalente a: *
(10 Pontos)

- $4y - 3 = 6$
- $2y - 3y = -5$
- $28 - y = 21$
- $2y - 4 = 8$ ✓

6

A solução da equação - 3,8 = 5,2 - x é: *
(10 Pontos)

- 9
- $1,4$
- $-1,4$
- -9

7

Qual das equações que se seguem tem uma solução negativa? *
(10 Pontos)

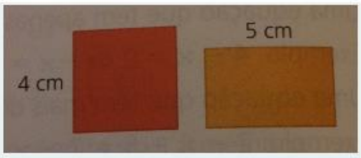
- $\frac{x}{12} = 7$
- $-1,8 = -0,3x$
- $x + \frac{1}{2} = 3$
- $\frac{x}{15} = -3$ ✓

8

Em relação à equação 5 - 11x + 21 = 48 podemos afirmar que: *
(10 Pontos)

- O conjunto solução é composto pelo número -2 ✓
- O conjunto solução é composto pelo número -1
- O conjunto solução é composto pelo número 1
- O conjunto solução é composto pelo número 2

9



Na figura estão representados um quadrado e um retângulo com o mesmo perímetro. Qual é a largura do retângulo? *
(10 Pontos)

- $3,25 cm$
- $3\ cm$ ✓
- $3,5\ cm$
- $3,75\ cm$

10

Numa estação de serviço, o Sr. João reparou que a pressão de um dos pneus do automóvel não era a ideal. Aumentou a pressão 0,4 bar, mas, a seguir, baixou-a em 0,25 bar.
A pressão do pneu ficou em 2,3 bar.
Qual era a pressão inicial do pneu? *
(10 Pontos)

- $2\ bar$
- $2,15\ bar$ ✓
- $2,25\ bar$
- $2,45\ bar$

Anexo 6: Plano de aula de 2 de março de 2020

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Data: 02/03/2020	Ano: 7.º Turma: B	Duração: 100 minutos

LIÇÃO Nº: 81 e 82 **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Introdução ao estudo das Equações. • Expressões algébricas. • Resolução de uma ficha de trabalho.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
Conhecer a noção de expressões algébricas e como operar com expressões algébricas simples.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**CAPACIDADES TRANSVERSAIS**
▪ Sequência e sucessões; ▪ Termo geral de uma sucessão; ▪ Conceito de ordem e termo de uma sucessão; ▪ Propriedades da adição e multiplicação.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Raciocinar matematicamente; • Generalizar; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho a pares.
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**

▪ Cubos e autocolantes; ▪ Quadro; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad; ▪ Projetor.	▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA	**TEMPO (EM MINUTOS)**
1. Registo do sumário.	5
2. Apresentação da questão 1 da tarefa "Expressões algébricas".	5
3. Realização das questões 1.1 e 1.2 da tarefa "Expressões algébricas".	10
4. Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo.	10
	5
5. Realização da questão 1.3 a) em grupo turma.	
	10
6. Realização das restantes alíneas da questão 1.3 da tarefa "Expressões algébricas".	
Intervalo	10
7. Discussão em grande grupo da questão 1.3 realizada em trabalho autónomo.	5
	10
8. Realização da questão 1.4 da tarefa "Expressões algébricas".	
	20
8. Discussão em grande grupo da questão 1.4 realizada em trabalho autónomo.	
	5
7. Realização da questão 2 da tarefa "Expressões algébricas".	
8. Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo.	

Desenvolvimento da aula

1. **Registo do sumário. (5 minutos)**

2. **Apresentação da questão 1 da tarefa "Expressões algébricas" (5 minutos)**

   Utilização de modelo físico de modo a garantir que os alunos percebem qual o número de autocolantes da construção 1 e 2, bem como o desaparecimento de um autocolante da construção 1 na construção 2.

3. **Realização da questão 1.1 e 1.2 da tarefa "Expressões algébricas" (10 minutos)**

   A ficha de trabalho será enviada para os IPad dos alunos.

   Enquanto estes resolvem a tarefa a pares circularei pela sala no sentido de esclarecer dúvidas que possam surgir, bem como para selecionar as resoluções da tarefa a apresentar na discussão coletiva.

<u>Questão 1.1 a)</u>

<u>Resolução 1:</u> (Resolução semelhante para 1.1 b))

Construção 1: 6 autocolantes

Construção 2: 10 autocolantes = 6 + 4 autocolantes

Construção 3: 10 + 4 autocolantes = 14 autocolantes

A lei de formação da sucessão relativa ao número de autocolantes do cubo é "somar 4 à construção anterior".

<u>Resolução 2:</u> (Resolução semelhante para 1.1 b))

A construção 2 tem 10 autocolantes.

Destes 10 retiramos 1 que irá ser tapado pelo terceiro cubo, ficando 9.

Ao acrescentar 1 cubo, as faces visíveis do mesmo são 5, que correspondem a 5 autocolantes logo, o número de autocolantes total será 9 + 5 = 14 autocolantes.

<u>Resolução 3:</u>

De construção para construção acrescenta-se sempre 4 autocolantes.

Temos então a lei de formação da sucessão que consiste em somar 4 ao termo anterior.

Já conhecemos uma sucessão que se comporta desta forma, a sucessão dos múltiplos naturais de quatro cujo termo geral é 4n. Vamos comparar os termos das duas sucessões:

4, 8, 12,16,18,24,28,…

6,10,14,18,22,26,30,…

Conseguimos observar que se adicionarmos 2 a cada um dos termos da sucessão dos múltiplos naturais de quatro obtemos os termos da sucessão que pretendemos.

Logo, o termo geral da sucessão é da forma $u_n = 4n + 2$.

Assim, o termo de ordem 3 será $u_3 = 4\times3 + 2 = 14$ autocolantes.

Logo, a construção com 3 cubos terá 14 autocolantes.

Dificuldades: (Válido para todas as alíneas de 1.1)

→ Relacionar o número de autocolantes da construção 1 e da construção 2 com o da construção 3.
→ Perceber que o número de autocolantes que se acrescenta de construção para construção é o mesmo.
→ Determinação do termo geral da sucessão.
→ Conseguir através do termo geral descobrir o termo de ordem 3.

Apoio a eventuais dificuldades: (Válido para todas as alíneas de 1.1)

Questionar os alunos sobre:

→ Qual o número de autocolantes na primeira construção? E na segunda?
→ Quando pedem o número de autocolantes da construção com 3 cubos estão a pedir-nos a ordem ou o termo?
→ Conhecendo uma lei de formação, como se calcula o terceiro termo da sucessão?
→ Conhecendo o termo geral, como calculamos um termo da sucessão?

Questão 1.1 b)

(2 resoluções semelhantes à da questão 1.1 a), assinaladas anteriormente)

Resolução:

Sabendo o termo geral calculado na alínea i., o termo de ordem 4 será $u_4 = 4\times4 + 2 = 18$ autocolantes.
Logo, a construção com 4 cubos terá 18 autocolantes.

Questão 1.2

Resolução 1:

De construção para construção acrescenta-se sempre 4 autocolantes.

Temos então a lei de formação da sucessão que consiste em somar 4 unidades ao termo anterior.

Já conhecemos uma sucessão que se comporta desta forma, a sucessão dos múltiplos naturais de quatro cujo termo geral é 4n. Vamos comparar os termos das duas sucessões:

4, 8, 12,16,18,24,28,…

6,10,14,18,22,26,30,…

Conseguimos observar que se adicionarmos 2 a cada um dos termos da sucessão dos múltiplos de quatro obtemos os termos da sucessão que pretendemos.

Logo, o termo geral da sucessão é da forma $u_n = 4n + 2$.

Resolução 2:

Os cubos das pontas da construção têm sempre 5 autocolantes, a partir da segunda construção, logo teremos sempre 10 autocolantes nas pontas.
O número de cubos que ficam no meio da construção é dado por n-2, pois ao número total de cubos estamos a retirar os dois da ponta.
Cada cubo do meio terá 4 autocolantes, logo, o número de autocolantes dos cubos que se situam no meio da construção será dado pela expressão 4(n-2).
Assim, o número total de autocolantes da construção é dado por 4(n-2)+10.
Como a primeira construção é a única que não tem cubos das pontas e do meio, vamos verificar se a expressão encontrada é válida para esta construção.
u_n=4(n-2)+10
u_1=4(1-2)+10 = 6, logo, verifica-se também para a primeira construção.
Assim, o termo geral é u_n=4(n-2)+10.

Resolução 3:
A construção n é um sólido geométrico com 6 faces. Neste sólido, cada face da "ponta" é uma face de um dos cubos.
Logo, precisamos de 1 autocolante para cada face das "pontas".
Para cada uma das restantes 4 faces precisamos de n autocolantes. Assim, no total são necessários 4n+2 autocolantes.
Pelo que o termo geral é u_n=4n+2

Dificuldades:

→ Estabelecimento de uma relação entre o número de cubos e o número de autocolantes.
→ Determinação de estratégia de contagem de modo a estabelecer uma relação entre o número de cubos e o número de autocolantes.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos sobre:

→ Qual o número de autocolantes na primeira construção? E na segunda? E na terceira? Que relação têm?
→ A partir das três primeiras construções não consegue perceber a lei de formação que permite encontrar o número de autocolantes das construções seguintes?
→ O número de autocolantes que se acrescenta em cada construção, de que modo poderá ajudar na obtenção do termo geral?

4. Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo. (10 minutos)

- → Os alunos que serão selecionados para apresentar as suas resoluções terão de possuir estratégias ou raciocínios distintos bem como justificações adequadas e completas ou outras não tão adequadas mas que suscitem discussões interessantes na turma, estratégias essas como as apresentadas acima, ou outras que eu não tenha ponderado mas que sejam interessantes. Esta seleção será feita aquando do trabalho autónomo, à medida que tiro dúvidas e circulo na sala de aula.
- → Irei fotografar as resoluções dos alunos e projetá-las para os mesmos conseguirem explicar aos colegas a sua estratégia.
- → Após um aluno ou mais alunos apresentarem as suas resoluções utilizarei o termo geral obtido em 1.2 para introduzir o conceito de expressão algébrica, fazendo a comparação com a expressão numérica.
- → Abordarei a expressão algébrica como uma expressão que envolve variáveis e números com operações da aritmética.
- → Falarei ainda da variável como uma letra que pode assumir vários valores numéricos, como no caso do termo geral em que o n pode representar qualquer ordem dos termos da sucessão.
- → Posteriormente, introduzirei os conceitos de coeficiente, parte literal, constante e termo, sempre com apoio no termo geral obtido na questão 2.

5. Realização da questão 1.3 a) em grande grupo (5 minutos)

Realização da questão em grande grupo, de modo a poder esclarecer o que são termos semelhantes (termos com a mesma parte literal) e como se opera com os mesmos.

Resolução

$6n + 2 - 2n = 6n - 2n + 2 = 4n + 2$

Logo, v_n também representa o termo geral da sucessão.

Dificuldades: (Análogo para as várias alíneas de 1.3)

- → Compreender que a expressão apresentada pode ser simplificada.
- → Saber como simplificar a expressão, ou seja, reduzindo os termos semelhantes.
- → Realizar operações entre termos semelhantes e não semelhantes.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para as várias alíneas de 1.3)

Questionar o aluno sobre:

- → Será que podemos operar com termos com e sem n?
- → Se operar com termos com e sem n, substituir o n na expressão inicial e depois na final obtém o mesmo valor?

6. Realização da questão 1.3 da ficha de trabalho “Expressões algébricas” (10 minutos)

Questão 1.3 b)

Resolução

$8n - 4 - n + 2 = 8n - n - 4 + 2 = 7n - 2$

$t_1 = 7 \times 1 - 2 = 5 \neq u_1$

Logo, o termo geral t_n não pode ser termo geral da sucessão.

Questão 1.3 c)

Resolução

$10 + 4(n - 2) = 10 + 4n - 8 = 4n + 10 - 8 = 4n + 2$

Logo, o termo geral z_n pode ser termo geral da sucessão.

Questão 1.3 d)

Resolução:

$5(n - 1) + 2n + 4 = 5n - 5 + 2n + 4 = 5n + 2n - 5 + 4 = 7n - 1$

$w_1 = 7 \times 1 - 1 = 6 = u_1$

$w_2 = 7 \times 2 - 1 = 13 \neq u_2$

Logo, o termo geral w_n não pode ser termo geral da sucessão.

7. **Discussão em grande grupo da questão 1.3 realizada em trabalho autónomo. (10 minutos)**

→ Os alunos, previamente selecionados, irão apresentar as suas resoluções. Esta seleção será feita aquando do trabalho autónomo, à medida que tiro dúvidas e circulo na sala de aula.

8. **Realização da questão 1.4 da tarefa "Expressões algébricas (5 minutos)**

Questão 1.4 a)

Resolução:

$u_5 = 4 \times 5 + 2 = 22$

Como a construção com 5 cubos leva 22 autocolantes, e como a Joana pretende utilizar o mesmo número de autocolantes dos dois tipo então irá utilizar 11 ☺ e 11 ☺.

O dinheiro a gastar nos autocolantes ☺ será 11a.

O dinheiro a gastar nos autocolantes ☺ será 11b.

O dinheiro total gasto é então a soma do dinheiro que gastou em cada tipo de autocolantes, ou seja, 11a + 11b.

Dificuldades:

→ Calcular o número total de autocolantes da construção 5.
→ Saber qual o número de autocolantes que irá comprar de cada tipo.
→ Fazer uma utilização correta das letras a e b na expressão pretendida.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos sobre:

→ Quantos autocolantes são necessários para a construção?
→ Quantos autocolantes de cada tipo a Joana precisa de comprar?
→ Se o preço de cada autocolante ☺ fosse 1€ quanto gastaria em ☺? Então não sabemos se é 1€ mas sabemos que é a, quanto dinheiro gasta nos autocolantes ☺ ?

Questão 1.4 b)

Resolução:

$13a + 8b - 2a + 3b = 13a - 2a + 8b + 3b = 11a + 11b$
Esta expressão corresponde à encontrada na alínea anterior, pelo que a Joana tem razão.

Dificuldades:

→ Compreender que a expressão apresentada pode ser simplificada.
→ Saber como simplificar a expressão reduzindo os termos semelhantes.
→ Fazer operações entre termos semelhantes e não semelhantes.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

→ Será que podemos operar com termos com a e b?
→ Se operar com termos com a e b, substituindo o a e o b na expressão inicial e depois na final obtém-se o mesmo valor?

Questão 1.4 c)

Resolução:

A expressão que nos indica o dinheiro gasto pela Joana em autocolantes em função do preço de cada tipo é $11a + 11b$

Temos que $a = 0{,}2\ e\ b = 0{,}3$, logo o dinheiro que a Joana gastou foi $11 \times 0{,}2 + 11 \times 0{,}3 = 5{,}5$

Logo, a Joana gastou 5 euros e meio em autocolantes.

Dificuldades:

→ Converter os valores dados em euros, visto que, *a* e *b* representam o preço em euros de cada um dos autocolantes.
→ Compreender que valores substituir em *a* e *b*.
→ Substituir corretamente na expressão algébrica.
→ Responder ao problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

→ A que corresponde os 20 cent. e os 30 cent.?
→ De que forma podemos descobrir quanto pagou a Joana?
→ Quantos autocolantes ☺ comprou a Joana? E quanto pagou por cada um deles? Então pelos 11 autocolantes quanto pagou?

9. Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo. (10 minutos)

→ Os alunos a apresentar as suas resoluções terão de possuir estratégias ou raciocínios distintos bem como justificações adequadas e completas, estratégias essas como as apresentadas acima, ou outras que eu não tenha ponderado mas que sejam interessantes. Esta seleção será feita aquando do trabalho autónomo, à medida que tiro dúvidas e circulo na sala de aula.
→ Irei fotografar as resoluções dos alunos e projetá-las para os mesmos conseguirem explicar aos colegas o seu raciocínio.
→ Sistematização da simplificação de expressões algébricas.

10. Realização da questão 2 da tarefa "Expressões algébricas (20 minutos)

Questão 2.1

Resolução:

Figura 1: Gabriel

Pois, o Gabriel tem 4 caixas com k rebuçados ficando com 2 rebuçados para si, ou seja, o total de rebuçados é 4k + 2.

Figura 2: Lourenço

Pois, o Lourenço tem 2 caixas com k rebuçados ficando com 3 rebuçados para si, ou seja, o total de rebuçados é 2k + 3.

Figura 3: Gonçalo

Pois, o Gonçalo tem 4 caixas com k rebuçados, não ficando com rebuçados para si, ou seja, o total de rebuçados é 4k + 0 = 4k.

Figura 4: Carlos

Pois, o Carlos tem 2 caixas com k rebuçados ficando com 2 rebuçados para si, ou seja, o total de rebuçados é 2k + 2

Dificuldades:

- → Associação do k ao número de rebuçados por caixa.
- → Compreender o significado das expressões algébricas de modo a fazer a correspondência corretamente.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

- → O que significa o k?
- → O que poderá ser 4k? e o +2?

Questão 2.2

Resolução:

Como já temos as expressões que indicam o número de rebuçados que cada amigo comprou basta então somar essas expressões e obtemos o número total de rebuçados comprados pelos amigos.

$$4k + 2 + 2k + 3 + 4k + 2k + 2 = 4k + 2k + 4k + 2k + 2 + 3 + 2 = 12k + 7$$

A expressão simplificada que representa o número total de rebuçados comprados pelos quatro amigos é 12k+7.

Dificuldades:

- → Perceber que a expressão se obtém somando todas as expressões dadas que representam o número de rebuçados comprados por cada amigo.
- → Reduzir os termos semelhantes.
- → Operar apenas com termos semelhantes.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos sobre:

- → Como obtemos o número total de rebuçados comprados pelos amigos?
- → O que nos dizem no enunciado que pode ser importante para conseguirmos responder à questão?
- → A expressão que se obtém ao somar as várias expressões dadas no enunciado está simplificada?
- → Como simplificamos a expressão obtida?

Questão 2.3

Resolução:

$$2k - 12(-k - 1) - (5 + 2k) = 2k + 12\mathrm{k} + 12 - 5 - 2\mathrm{k} = 2\mathrm{k} - 2\mathrm{k} + 12\mathrm{k} + 12 - 5$$
$$= 12\mathrm{k} + 7$$

Esta expressão corresponde à encontrada na alínea anterior, pelo que o Gabriel tem razão.

Dificuldades:

- → Compreender que a expressão apresentada pode ser simplificada.
- → Desembaraçar de parêntesis corretamente, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição tendo atenção aos sinais.
- → Saber como simplificar a expressão reduzindo os termos semelhantes.
- → Fazer operações entre termos semelhantes e não semelhantes.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

- → O que necessitamos de fazer primeiro para podermos simplificar a expressão?
- → Que propriedade temos de utilizar para desembaraçar de parêntesis.
- → Qual o sinal posicional do número que está a multiplicar?
- → Será que podemos operar com termos com e sem k?
- → Se operar com termos com e sem k, substituindo o k na expressão inicial e depois na final obtém-se o mesmo valor?

Questão 2.4

Resolução:

Como têm o mesmo número de caixas, podemos pensar olhando apenas para o número de rebuçados que ficaram fora das caixas, visto que dentro das caixas têm o mesmo número de rebuçados.
Assim sendo, o Lourenço (cujo número de rebuçados comprados equivale à figura 2) tem mais rebuçados do que o Carlos (cujo número de rebuçados comprados equivale à figura 4).

Dificuldades:

- → Conseguir fazer a comparação sem saber o número concreto de rebuçados que cada amigo tem.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

- → Se observarmos apenas os rebuçados dentro das caixas algum deles tem mais rebuçados que o outro?
- → Se olharmos apenas para os rebuçados fora das caixas qual dos amigos tem mais rebuçados?

Questão 2.5

Resolução 1:

Se em cada caixa apenas estiver um rebuçado, o Lourenço (cujo número de rebuçados comprados equivale à figura 2) tem mais rebuçados que o Gonçalo (cujo número de rebuçados comprados equivale à figura 3).
No entanto, se em cada caixa estiver mais do que 1 rebuçado, o Gonçalo terá mais rebuçados que o Lourenço.

Resolução 2:

Podemos comparar apenas duas caixas do Gonçalo com 3 rebuçados do Lourenço, visto que, o número de rebuçados em duas caixas dos dois amigos é igual, podendo então retirar 2k rebuçados de cada um deles.
Assim, se em cada caixa estiver 1 único rebuçado, o Lourenço terá mais rebuçados, caso contrário, será o Gonçalo a ter mais rebuçados.

Dificuldades: (Análogo para 2.6)

- → Conseguir fazer a comparação sem saber o número concreto de rebuçados que cada amigo tem.
- → Perceber que um amigo ter mais ou menos rebuçados pode depender do número de rebuçados que está em cada caixa.
- → Fazer a comparação com número de caixas diferentes.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

- → Se o número de rebuçados em cada caixa for 1, quem tem mais rebuçados? E se for 2?

Questão 2.6

Resolução:

Vimos que, se o número de rebuçados em cada caixa for maior do que 1, entre o Gonçalo, o Lourenço e o Carlos, quem tem mais rebuçados é o Gonçalo, cujo número de rebuçados comprados equivale à figura 3, falta apenas compara com a figura 1 que corresponde ao número de rebuçados comprados pelo Gabriel. Como têm o mesmo número de caixas, apenas podemos comparar com os rebuçados fora delas, assim, o Gabriel tem mais rebuçados, seja qual for o k.
Posto isto, falta apenas compara a figura 1 com a figura 2 quando o k=1.
O Gabriel fica com 6 rebuçados e o Lourenço com 5.
Portanto, o Gabriel é o amigo com mais rebuçados independentemente do número de rebuçados em cada caixa.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar o aluno sobre:

→ Com as comparações feitas até agora quem tem mais rebuçados e em que circunstâncias?
→ Quem é que falta comparar?

11. Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo. (5 minutos)

→ Os alunos a apresentar as suas resoluções terão de possuir estratégias ou raciocínios distintos bem como justificações adequadas e completas, estratégias essas como as apresentadas acima, ou outras que eu não tenha ponderado mas que sejam interessantes. Esta seleção será feita aquando do trabalho autónomo, à medida que tiro dúvidas e circulo na sala de aula.
→ Irei fotografar as resoluções dos alunos e projetá-las para os mesmos conseguirem explicar aos colegas o seu raciocínio.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita através de observação.

Serão recolhidas algumas resoluções de alunos, de modo a perceber as aprendizagens adquiridas pelos mesmos.

Avaliação do empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Para isso, utilizar-se-á tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 7: Plano de aula de 4 de março de 2020

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Data: 04/03/2020	Ano: 7.º Turma: B	Duração: 50 minutos

LIÇÃO Nº: 83 **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Introdução ao estudo de equações do 1.º grau. • Continuação da resolução da ficha de trabalho da aula anterior.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
Saber simplificar expressões algébricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas; ▪ Simplificação de expressões algébricas.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; ▪ Raciocinar matematicamente; • Justificar.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho a pares.
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Questão 2 da tarefa em papel; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad;	▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA		TEMPO (EM MINUTOS)
1	Registo do sumário.	5
2	Realização da questão 1.4 da tarefa “Expressões algébricas (ver plano de aula anterior)	5
3	Discussão coletiva das questões realizadas em trabalho autónomo.	10
4	Realização da questão 2 da tarefa “Expressões algébricas (ver plano de aula anterior)	20
5	Discussão em grande grupo da questão realizadas em trabalho autónomo.	10

Desenvolvimento da aula

1. **Registo do sumário. (5 minutos)**
2. **Realização da questão 1.4 da tarefa “Expressões algébricas (5 minutos)**

   Resoluções, dificuldades e apoio a eventuais dificuldades (ver plano de aula anterior, visto que, esta tarefa estava planeada para a mesma).

3. **Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo. (10 minutos)**

4. **Realização da questão 2 da tarefa “Expressões algébricas (20 minutos)**

   Resoluções, dificuldades e apoio a eventuais dificuldades (ver plano de aula anterior, visto que, esta tarefa estava planeada para a mesma).

5. **Discussão em grande grupo das questões realizadas em trabalho autónomo. (10 minutos)**

Atividades complementares

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerida uma ficha de trabalho com tarefas extra a todos aqueles que já tiverem concluído, integralmente, a tarefa, antes do término da aula.

Avaliação

A avaliação dos alunos será feita através de observação.

Serão recolhidas algumas resoluções de alunos, de modo a perceber as aprendizagens adquiridas pelos mesmos.

Avaliação do empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Para isso, utilizar-se-á tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Trabalho para casa:

Realização da ficha de trabalho extra.

Anexo 8: Plano de aula de 17 de abril de 2020

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 17/04/2020 a 19/04/2020

Aula síncrona: 21/04/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 1 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Revisões sobre expressões algébricas. • Introdução ao estudo de equações.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Consolidar a terminologia associada às expressões algébricas e a simplificação de expressões algébricas.
- Compreender o que são e para que servem equações, bem como a terminologia associada.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**CAPACIDADES TRANSVERSAIS**
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Terminologia das expressões algébricas	▪ Comunicar oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Revisão sobre a simplificação de expressões algébricas. 3 Exemplo de simplificação uma expressão algébrica, em vídeo. 4 Revisão sobre a terminologia das expressões algébricas, em vídeo. 5 Resolução de um exercício sobre simplificação de expressões algébricas. 6 Introdução ao conceito de equação, em vídeo. 7 A noção de variável e de incógnita. 8 A noção de solução da equação. 9 Sistematização sobre a terminologia associada às equações, em vídeo. 10 Resolução da questão 3 da página 27 do manual. 11 Resolução da questão 4 da página 27 do manual. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

<u>Desenvolvimento da aula assíncrona</u>

1. **Registo do sumário.**

2. **Revisão sobre a simplificação de expressões algébricas.**

   Apresentar aos alunos um slide em PowerPoint com a seguinte revisão:

   <u>Revendo simplificação de expressões:</u>
   - ✓ Desembaraçar de parêntesis (se houver);
   - ✓ Reduzir os termos semelhantes.

3. **Exemplo de simplificação uma expressão algébrica, em vídeo.**

   Em vídeo, apresentar aos alunos um exemplo de uma expressão algébrica, que coincide com a expressão do exercício 2.3 da ficha de trabalho "Expressões algébricas" trabalhada na segunda aula, ainda presencial, da unidade didática.

   A expressão é a seguinte:

   Exemplo: $2k-12(-k-1)-(5+2k)$
   (retirado do exercício 2.3 da ficha de trabalho "expressões algébricas")

   $$\begin{aligned} &2k-12(-k-1)-(5+2k) = \\ &= 2k+12k+12-5-2k = \\ &= 2k+12k-2k+12-5 = \\ &= 12k+7 \end{aligned}$$

   - → No vídeo salientar a ordem já indicada na revisão de simplificação de expressões algébricas que indica que o primeiro passo é desembaraçar de parêntesis.
   - → De seguida, esta simplificação permitirá a revisão de algumas propriedades da multiplicação, nomeadamente da propriedade distributiva em relação à adição.
   - → Na passagem para o segundo passo na simplificação de expressões algébricas, ou seja, a redução dos termos semelhantes, aproveitar para relembrar esta mesma noção de termos semelhantes.
   - → Fazer ainda referência à propriedade comutativa da adição no terceiro passo da resolução.
   - → Por fim, salientar mais uma propriedade, a soma de números simétricos ser 0, cuja sua identificação permite uma resolução mais rápida da questão.

4. **Revisão sobre a terminologia das expressões algébricas, em vídeo.**

Recorrendo à expressão simplificada do exemplo apresentado no vídeo de revisão de simplificação de expressões algébricas e elaborar uma revisão da terminologia relativa às expressões algébricas já abordada na primeira aula.

12k+7

Termos: 12k; 7
Parte literal: k
Termo com parte literal: 12k
Constante: 7
Coeficiente: 12

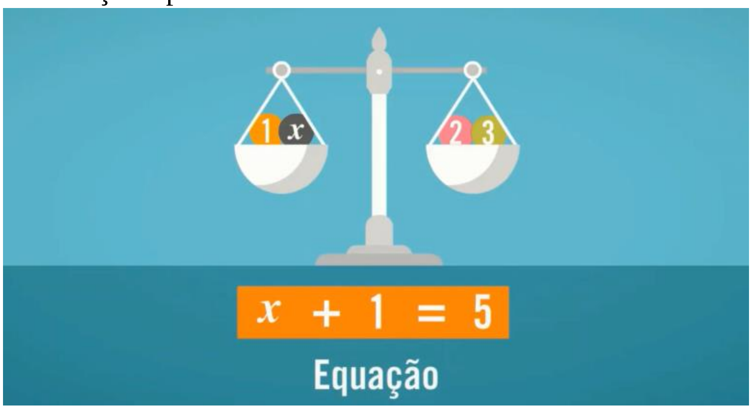
Identificar, na expressão 12k+7, os termos, a parte literal, os termos com parte literal, a constante e ainda o coeficiente.

5. Resolução de um exercício sobre simplificação de expressões algébricas.

Ver aula síncrona.

6. Introdução ao conceito de equação, em vídeo.

A explicação a apresentar no vídeo sobre o que é e para que serve uma equação fará uso do modelo da balança de pratos.



→ A explicação a dar será:

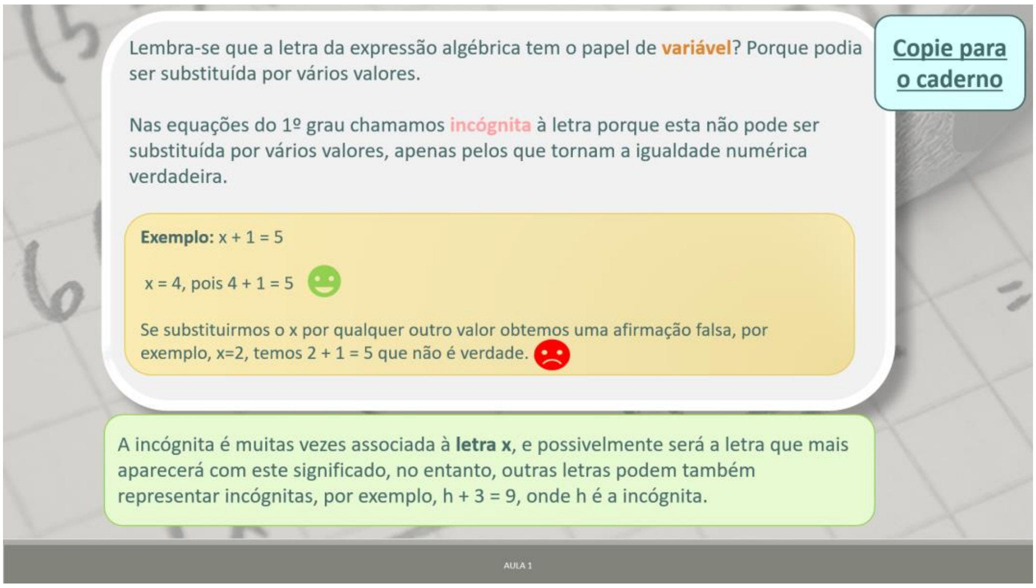
Como a balança está em equilíbrio, ambos os pratos têm igual peso, logo, esta situação pode ser traduzida por uma igualdade entre expressões algébricas, ou seja,
$x + 1 = 2 + 3 \; ou \; simplificando, x + 1 = 5.$
A uma igualdade deste tipo, onde ocorre pelo menos uma letra a representar um valor desconhecido, designamos por equação.
Por fim, descobre-se o valor do peso cinzento do prato da direita pensando "qual o número que adicionado a 1 dá 5" e chegamos à resposta $x = 4$.

→ Após o vídeo apresentar um slide com a definição de equação com uma incógnita para os alunos copiarem para o caderno. A definição é a seguinte:

Equação com uma incógnita: Igualdade de expressões algébricas, que inclui uma letra que representa um valor desconhecido designado "incógnita".

7. A noção de variável e de incógnita.

Elaborar um slide para explicar o que é uma incógnita.

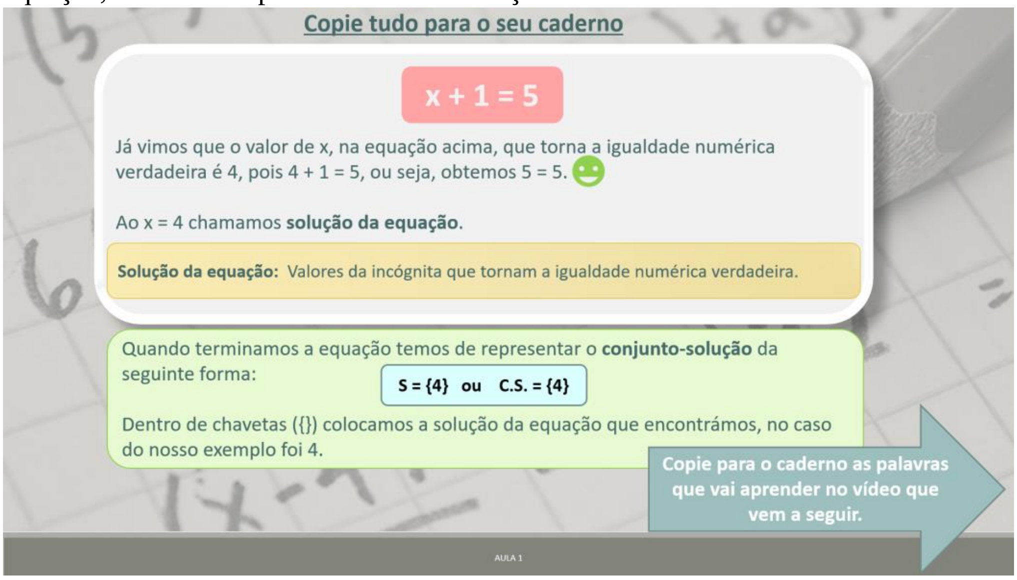


→ Comparar com a variável que foi trabalhada nas expressões algébricas para que os alunos compreendam a diferença entre ambas.

→ Chamar à atenção ainda que, grande parte das vezes a incógnita é representada pela letra x, no entanto, qualquer outra letra pode também ter este papel.

8. A noção de solução da equação.

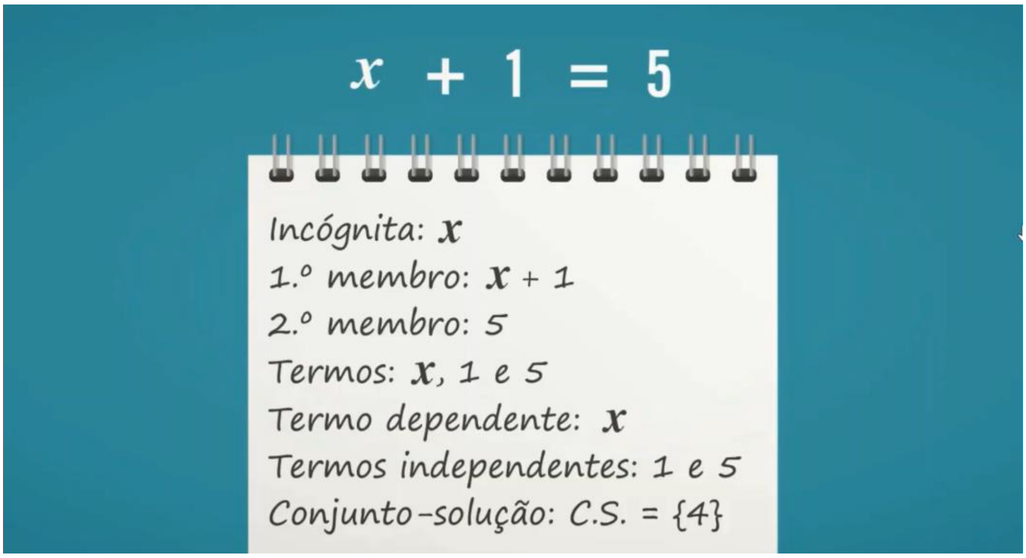
Recorrer novamente a um slide em PowerPoint para explicar o que é a solução de uma equação, bem como apresentar a sua definição.



→ Por fim, abordar a representação do conjunto solução que deve aparecer sempre que terminamos a resolução de uma equação.

9. Sistematização sobre a terminologia associada às equações, em vídeo.

Utilizando a equação do vídeo sobre o que é uma equação, apresentar a terminologia associada às equações:



→ À medida que se for identificando as várias partes que formam uma equação explicar em que consiste cada uma delas:

- A **incógnita** já tinha sido abordada em slides anteriores.
- **1.º membro:** lado esquerdo da igualdade.
- **2.º membro:** lado direito da igualdade.
- Os membros da equação são constituídos por **termos.**
- **Termo dependente:** termo com letra, varia conforme o valor da incógnita.
- **Termos independentes ou constantes:** têm sempre o mesmo valor independentemente do valor da incógnita.
- O **conjunto solução** já tinha sido abordado em slides anteriores.

10. Resolução da questão 3 da página 27 do manual.

Ver aula síncrona.

11. Resolução da questão 4 da página 27 do manual.

Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

1. Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.
No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Alínea a) $\mathbf{7x+2(4x+5)-3(x-1)}$

Resolução:

$$7x+2(4x+5)-3(x-1)=7x+2\times 4x+2\times(+5)-3\times x-3\times(-1)=$$
$$=\underline{7x}\,\underline{+8x}\,\underline{+10}\,\underline{-3x}\,\underline{+3}=$$
$$=12x+13$$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para a alínea b)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Identificar a propriedade a aplicar para desembaraçar de parêntesis.
- → Aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
- → Efetuar corretamente a multiplicação de números inteiros.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos: (Análogo para a alínea b)

Questionar os alunos:

- → Aplicando a propriedade distributiva que números vamos multiplicar?
- → Qual o sinal posicional do -3, e do -1?
- → Ao multiplicar dois números negativos resulta num número positivo ou negativo?

Alínea b) $\mathbf{3x - (5x + 1) - 2(-4x - 3)}$

Resolução:

$$3x - (5x + 1) - 2(-4x - 3) = 3x - 1 \times 5x - 1 \times (+1) - 2 \times (-4x) - 2 \times (-3) =$$

1

$$= 3x - 5x - 1 + 8x + 6 =$$

$$= 6x + 5$$

Alínea c) $\mathbf{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}(2x + 4) + \frac{2}{3}}$

Alternativa

$$-\frac{5}{2} \times 2x = -\frac{5 \times 2}{2} x = -\frac{10}{2} x = -5x$$

Resolução:

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{2}(2x + 4) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{5}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x - \frac{5}{2} \times (+4) + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} - 5x - \frac{20}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} - 5x - \underset{(\times 3)}{10} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} - 5x - \frac{30}{3} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{30}{3} + \frac{2}{3} - 5x =$$

$$= -\frac{27}{3} - 5x =$$

$$= -5x - 9$$

Alternativa

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 5x - 10 =$$

$$= \frac{3}{3} - 5x - 10 =$$

$$= 1 - 5x - 10$$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para a alínea d)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Identificar a propriedade a aplicar para desembaraçar de parêntesis.
→ Correta aplicação da propriedade distributiva.
→ Correta multiplicação de números racionais, entre frações e números inteiros.
→ Adicionar e subtrair frações, reduzindo primeiro ao mesmo denominador.
→ Escolha do denominador, pensando, por exemplo, no mínimo múltiplo comum.
→ Verificar se a fração é irredutível ou não.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para a alínea d)

Questionar os alunos:

- → Aplicando a propriedade distributiva que números vamos multiplicar?
- → Qual o sinal posicional do $-\frac{5}{2}$?
- → Ao multiplicar dois números negativos resulta num número positivo ou negativo?
- → Como se multiplica uma fração por um número inteiro? Podemos transformar o número inteiro numa fração também?
- → Podemos adicionar $\frac{1}{3}$ e -10? O que precisamos fazer primeiro?
- → Qual é o denominador do -10?
- → Qual o mínimo múltiplo comum entre 1 e 3?
- → $-\frac{27}{3}$ é uma fração irredutível? Não há nenhum número que divida simultaneamente 27 e 3?

Alínea d) $\frac{7}{2}-\frac{5}{4}(4x+7)+3\left(5x+\frac{3}{2}\right)$

Alternativa

$$-\frac{5}{4}\times 4x=-\frac{5\times 4}{4}x=-\frac{20}{4}x=-5x$$

Resolução:

$$\frac{7}{2}-\frac{5}{4}(4x+7)+3\left(5x+\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}-\frac{5}{\cancel{4}}\times\cancel{4}x-\frac{5}{4}\times(+7)+3\times 5x+3\times\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{7}{2}-5x-\frac{5\times(+7)}{4}+15x+\frac{3\times 3}{2}=$$

$$\underset{(\times 2)}{=}\frac{7}{2}-5x-\frac{35}{4}+15x+\frac{9}{2}\underset{(\times 2)}{=}$$

$$=\frac{14}{4}-5x-\frac{35}{4}+15x+\frac{18}{4}=$$

$$=\frac{14}{4}-\frac{35}{4}+\frac{18}{4}+10x=$$

$$=10x-\frac{3}{4}$$

Exercício 3 da página 27

Resolução:

3 Das seguintes expressões com variáveis, indica as que são expressões algébricas e as que são equações:

(A) $5-3x$ Expressão algébrica

(B) $4-x=0$ Equação

(C) $a+b-3$ Expressão algébrica

(D) $a+b=4$ Equação

(E) $5c=10$ Equação

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Ter conhecimento do conceito de expressão algébrica e de equação.
- → Saber o que distingue uma equação de uma expressão algébrica.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos sobre:

- → O que é uma equação?
- → O que é uma expressão algébrica?

Exercício 4 da página 27

Alínea (A): $10 - x = -5$

Resolução:

4. (A) $10 - x = -5$

a) a incógnita. x

b) o 1.º e o 2.º membros. $1^{\text{º}}\ membro: 10 - x$ $2^{\text{º}}\ membro: -5$

c) os termos sem incógnita. $10; -5$

d) os termos com incógnita. $-x$

e) os termos do 1.º membro. $10; -x$

f) os termos do 2.º membro. -5

Antecipação de dificuldades: (Análogo para (B), (C) e (D))

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Ter conhecimento dos vários conceitos presentes na questão.
- → Não esquecer dos sinais posicionais de "–" de alguns termos.
- → Quando se pede para indicar os termos de cada membro, indicá-los separadamente e não colocando todo o primeiro membro ou todo o segundo membro.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para (B), (C) e (D))

Questionar os alunos:

- → Qual o sinal posicional do -10?
- → Pedir para indicar os termos do 1.º membro é o mesmo que pedir para indicar o 1.º membro?

Alínea (B): $3x - 1 = 4x + 5 - 2x$

Resolução:

4. (B) $3x - 1 = 4x + 5 - 2x$

a) a incógnita. x

b) o 1.º e o 2.º membros. $1^{\underline{o}}\ membro: 3x - 1$ $2^{\underline{o}}\ membro: 4x + 5 - 2x$

c) os termos sem incógnita. $-1; +5$

d) os termos com incógnita. $3x; 4x; -2x$

e) os termos do 1.º membro. $3x; -1$

f) os termos do 2.º membro. $4x; +5; -2x$

Alínea (C): $0 = -2a + 4$

<u>Resolução:</u>

4. (C) $0 = -2a + 4$

a) a incógnita. a

b) o 1.º e o 2.º membros. $1^{\underline{o}}\ membro: 0$ $2^{\underline{o}}\ membro: -2a + 4$

c) os termos sem incógnita. $0; +4$

d) os termos com incógnita. $-2a$

e) os termos do 1.º membro. 0

f) os termos do 2.º membro. $-2a;\ +4$

Alínea (D): $-7 + b = 3 - b$

<u>Resolução:</u>

4. (D) $-7 + b = 3 - b$

a) a incógnita. b

b) o 1.º e o 2.º membros. $1^{\underline{o}}\ membro: -7 + b$ $2^{\underline{o}}\ membro: 3 - b$

c) os termos sem incógnita. $-7; +3$

d) os termos com incógnita. $+b; -b$

e) os termos do 1.º membro. $-7;\ +b$

f) os termos do 2.º membro. $+3; -b$

Atividades complementares

Para permitir que o tempo da aula síncrona seja utilizado de forma útil, se a resolução das várias atividades, bem como o esclarecimento de dúvidas terminar mais cedo os alunos serão incentivados a resolver as alíneas 1.1 e 1.2 da atividade 1 da página 26 do manual até que a aula síncrona termine.

1.1. Descobre o número racional que deves colocar em cada uma dos espaços de modo a obteres afirmações verdadeiras:

a) $\boxed{3} + 5 = 8$ **b)** $-4 : \boxed{-4} = 1$ **c)** $\boxed{\frac{1}{7}} \times 7 = 1$ **d)** $\boxed{-6} + 6 = 0$

1.2. Escreve a igualdade que cada figura sugere e descobre o valor de x, em cada caso.

$x + 5 = 14$

$x = 9$

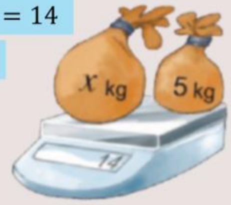


Figura 1

$x + x + x = 18$

$3x = 18$

$x = 6$

Figura 2

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 9: Plano de aula de 21 de abril de 2020

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 21/04/2020 a 22/04/2020

Aula síncrona: 24/04/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 2 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Equações. • 1.º Princípio de equivalência. • 1.ª Regra prática.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Saber resolver equações do tipo "x + a = b" utilizando o 1.º Princípio de equivalência e a 1.ª Regra prática.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas.	▪ Comunicar oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

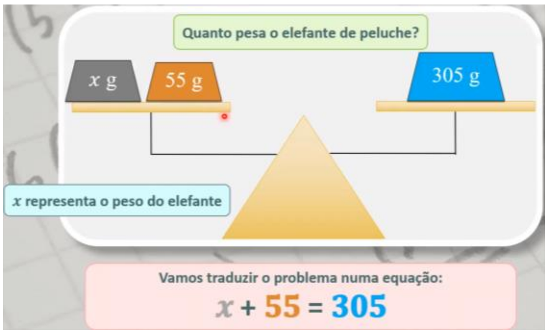
RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Exemplo “Peso do elefante”, em vídeo. 3 A noção de equações equivalentes, em vídeo. 4 1.º Princípio de equivalência, em vídeo. 5 Resolução da ficha de trabalho n.º 1. 6 1.ª Regra prática, em vídeo. 7 Resolução de um exercício sobre resolução de equações do tipo “x + a = b”. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

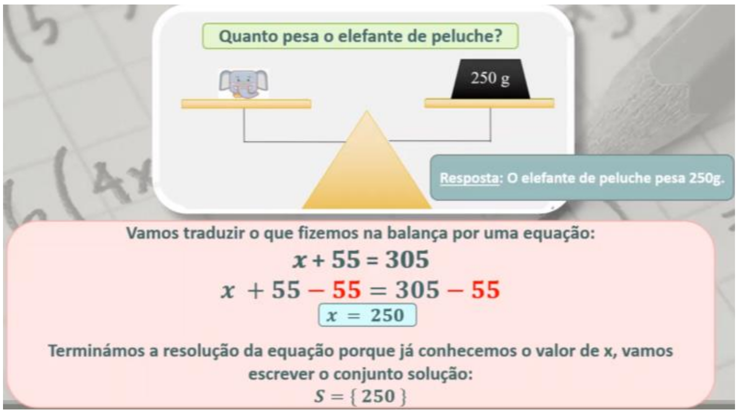
Desenvolvimento da aula assíncrona

1. **Registo do sumário.**
2. **Exemplo “peso do elefante”, em vídeo.**

Em vídeo, apresentar o exemplo do “Peso do elefante” começando por traduzir o problema por meio de uma equação.



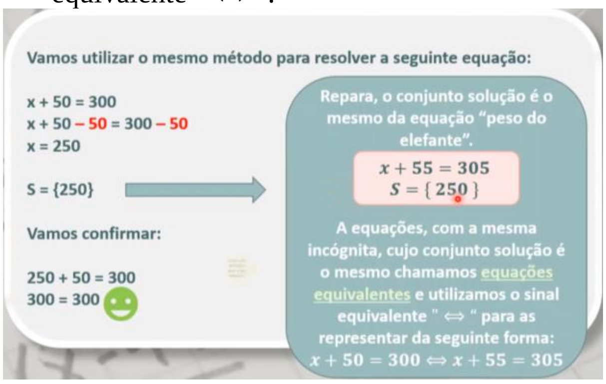
- ✓ Salientar que, como a balança está em equilíbrio, o peso do prato da direita é igual ao peso do prato da esquerda.
- ✓ Assim, o problema pode ser traduzido por uma equação, onde o 1.º membro corresponde ao peso do prato da esquerda que, por sua vez, tem de ser igual ao peso do prato da direita que corresponde ao 2.º membro da equação.
- ✓ De seguida, passar à resolução do problema utilizando os pesos da balança, definindo à partida uma estratégia que consiste em deixar o peso desconhecido x isolado num dos pratos.
- ✓ Para o peso x ficar isolado é necessário retirar 55 g do prato da esquerda, mas para manter o equilíbrio da balança, temos de retirar também 55 g do prato da direita.
- ✓ Desta forma, já é possível responder ao problema, mas como o objetivo é aprender a resolver equações, traduzir o que foi feito com os pesos das balanças por equações:
    - o Repetir a equação inicial encontrada anteriormente.
    - o Retirar 55 a ambos os membros da equação inicial.
    - o Reduzir os termos semelhantes.
    - o Apresentar o conjunto solução.



3. A noção de equações equivalentes, em vídeo.

Em vídeo, resolver uma outra equação seguindo o método usado na resolução da equação do "Peso do elefante".

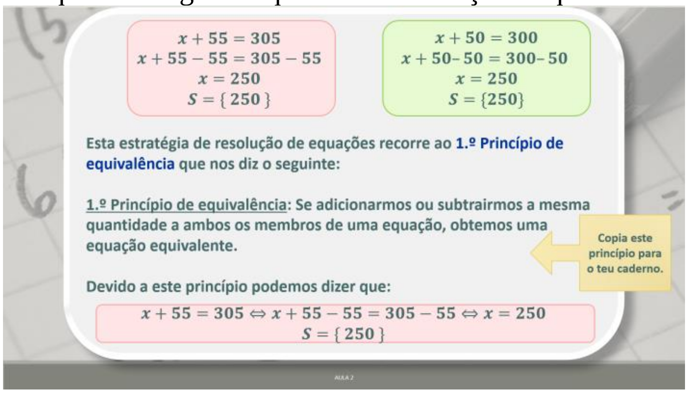
- ✓ Após resolver a equação, explicar como se confirma se o valor encontrado é mesmo solução da equação.
- ✓ Posteriormente, verificar que o conjunto solução desta equação é igual ao da equação do "peso do elefante".
- ✓ Por fim, apresentar a definição de equações equivalentes e o sinal de equivalente " $\Leftrightarrow$ ".



4. **1.º Princípio de equivalência, em vídeo.**

Em vídeo, colocar lado a lado as duas equações resolvidas até ao momento e indicar que a estratégia utilizada recorre ao 1.º Princípio de equivalência.

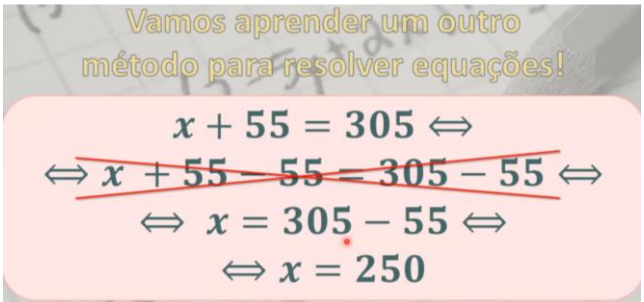
- ✓ De seguida, apresentar o 1.º Princípio de equivalência.
- ✓ Por fim, explicar que o 1.º Princípio de equivalência garante que cada equação que vai surgindo aquando da resolução é equivalente à anterior.



5. **Resolução da ficha de trabalho n.º 1.**
   Ver aula síncrona.

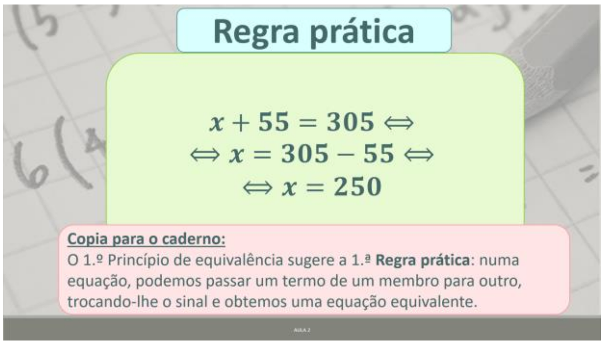
6. **1.ª Regra prática, em vídeo.**

Introduzir o vídeo dizendo que vamos aprender um novo método para resolver equações que permite eliminar um dos passos da resolução aprendida anteriormente que recorre ao 1.º Princípio de equivalência.



- ✓ Apresentar novamente a resolução da equação do "Peso do elefante" que recorre ao 1.º Princípio de equivalência, posteriormente dizer que com o novo método não precisamos de apresentar o segundo passo dessa mesma resolução, questionando de seguida o que acontece do primeiro passo para o terceiro.
- ✓ As conclusões retiradas serão que, como o objetivo é isolar o x num dos membros, então o 55 terá de sair do 1.º membro para o 2.º membro, mas quando um termo troca de membro tem também de trocar de sinal.
- ✓ Por fim, apresentar a designação deste novo método como 1.ª Regra prática, afirmando que é sugerida pelo 1.º Princípio de equivalência, no entanto, e tal como o nome indica, é um método mais prático para resolver equações porque permite

resolvê-las com recurso a menos passos, o que facilita, principalmente, quando o nível de complexidade das equações é superior.



7. **Resolução de um exercício sobre resolução de equações do tipo "x + a = b".**
   Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

1. **Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.**

Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.
No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Ficha de trabalho n.º 1

1.1 a) $-5 + x = -10$

Resolução:

i. a incógnita; x
ii. o 1.º e o 2.º membro; $1^{\underline{o}}\ membro: -5 + x$ $2^{\underline{o}}\ membro: -10$
iii. os termos com incógnita; $+x$
iv. os termos sem incógnita; $-5; -10$
v. os termos do 1.º membro; $-5; +x$
vi. os termos do 2.º membro. -10

Antecipação de dificuldades: (Análogo para as alíneas b e c)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Ter conhecimento da terminologia associada às equações.
→ Distinguir 1.º membro de termos do 1.º membro (ou 2.º membro).
→ Atender aos sinais posicionais de cada termo.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos: (Análogo para as alíneas b e c)

Questionar os alunos:

→ O que distingue 1.º membro de termos do 1.º membro?
→ Qual o sinal posicional de -5? E de x?

1.1 b) $y + 7 + 3 = 0$

Resolução:

i. a incógnita; y

ii. o 1.º e o 2.º membro; $1^{\underline{o}}\ membro: y + 7 + 3$
$2^{\underline{o}}\ membro: 0$

iii. os termos com incógnita; y

iv. os termos sem incógnita; $+7; +3; 0$

v. os termos do 1.º membro; $y; +7; +3$

vi. os termos do 2.º membro. 0

1.1 c) $-6 = x - 1$

Resolução:

i. a incógnita; x

ii. o 1.º e o 2.º membro; $1^{\underline{o}}\ membro: -6$
$2^{\underline{o}}\ membro: x - 1$

iii. os termos com incógnita; x

iv. os termos sem incógnita; $-6; -1$

v. os termos do 1.º membro; -6

vi. os termos do 2.º membro. $x; -1$

1.2 a) $-5 + x = -10$

Resolução:

$$-5 + x = -10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{-5 + 5}_{0} + x = -10 + 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -5$$
$$S = \{-5\}$$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para as alíneas b e c)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Perceber que número é necessário adicionar a ambos os membros da equação.
- → Correta aplicação do princípio de equivalência da adição.
- → Correta redução dos termos semelhantes.
- → Apresentar o conjunto solução.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para as alíneas b e c)

Questionar os alunos:

- → Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
- → Como conseguimos retirar o -5 de ao pé do x?
- → Devemos somar ou subtrair 5 a ambos os membros?
- → Quando terminamos a resolução de uma equação, o que temos de apresentar?

1.2 b) $\boldsymbol{y + 7 + 3 = 0}$

Resolução:

$$y + 7 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + 10 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + 10 - 10 = 0 - 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -10$$
$$S = \{-10\}$$

1.2 c) $\boldsymbol{-6 = x - 1}$

Resolução:

$$-6 = x - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6 + 1 = x - 1 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -5$$
$$S = \{-5\}$$

1.3

Sim, a equação da alínea a) e da alínea c) porque têm a mesma incógnita e conjunto solução igual.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Compreender o que são equações equivalentes e, portanto não responder nem justificar corretamente.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

→ O que são equações equivalentes?
→ Alguma das equações tem o mesmo conjunto solução e a mesma incógnita?

Exercício sobre resolução de equações do tipo "x + a= b"

Alínea a) $\boldsymbol{x + 3 = 9}$

Resolução:

$$x + 3 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 9 - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 6$$

$$S = \{6\}$$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para as alíneas b, c e d)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Perceber que número é necessário passar do 1.º membro para o 2.º.
→ Correta aplicação da regra prática, trocando o sinal do termo que passa para o 2.º membro.
→ Correta redução dos termos semelhantes.
→ Apresentar o conjunto solução

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para as alíneas b, c e d)

Questionar os alunos sobre:

→ Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
→ Se queremos isolar o x, o que está a mais ao pé dele?
→ Como conseguimos retirar o +3 de ao pé do x utilizando a regra prática?
→ Qual será o sinal posicional do 3 ao trocar de membro?
→ Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Alínea b) $\boldsymbol{x - 5 = 8}$

Resolução:

$$x - 5 = 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 8 + 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 13$$

$$S = \{13\}$$

Alínea c) $\boldsymbol{-4 + x = 9}$

Resolução:

$$-4 + x = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 9 + 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 13$$
$$S = \{13\}$$

Alínea d) $7 = -6 + x$

<u>Resolução:</u>

$$7 = -6 + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7 + 6 = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13 = x$$
$$S = \{13\}$$

Atividades complementares

Para permitir que o tempo da aula síncrona seja utilizado de forma útil, se a resolução das várias tarefas, bem como o esclarecimento de dúvidas, terminarem mais cedo, os alunos serão incentivados a resolver a tarefa 5 da página 28 do manual até que a aula síncrona termine.

Pág. 28 do manual

5 Verifica se algum dos números, $\frac{2}{3}$ ou -1, é solução da equação:

$3x + 5 = 2$

$$3 \times \frac{2}{3} + 5 = 2 \Leftrightarrow 2 + 5 = 2 \Leftrightarrow 7 = 2$$

$$3 \times (-1) + 5 = 2 \Leftrightarrow -3 + 5 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

Apenas -1 é solução da equação porque é o valor de x que torna a igualdade numérica verdadeira.

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 10: Plano de aula de 24 de abril de 2020

Colégio Militar
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 24/04/2020 a 26/04/2020

Aula síncrona: 28/04/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 3 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • 2.º Princípio de equivalência. • 2.ª Regra prática para a resolução de equações.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Resolver equações do tipo "$ax = b$" e "$ax + b = c$" utilizando os princípios de equivalência e a regra prática.
- Resolver problemas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Regra prática para a resolução de equações. ▪ 1.º Princípio de equivalência.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

RECURSOS

DA PROFESSORA	DO ALUNO
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona
1 Registo do sumário.
2 Introdução ao 2.º Princípio de equivalência, em vídeo.
3 Resolução da tarefa 10 da página 31 do manual.
4 Exemplo de resolução de uma equação do tipo "$ax + b = c$", em vídeo.
5 Introdução à 2.ª Regra prática, em vídeo.
6 Resolução da tarefa 11 da página 31 do manual.
7 Resolução de um problema.
Aula síncrona
1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Desenvolvimento da aula assíncrona

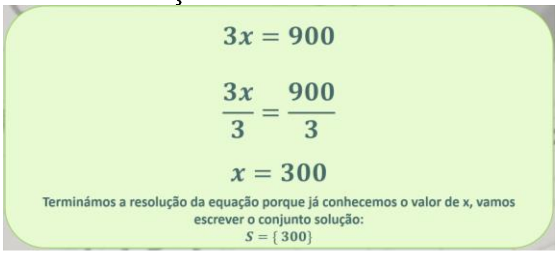
1. **Registo do sumário.**

2. **Introdução ao 2.º Princípio de equivalência, em vídeo.**

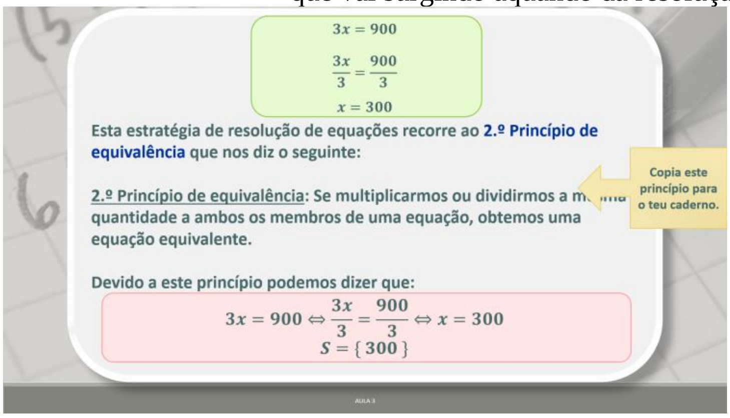
Em vídeo, apresentar a equação $3x = 900$ e questionar se a mesma é possível de ser resolvida com recurso ao 1.º Princípio de equivalência.

- ✓ Para introduzir esta nova metodologia começar por explicar o seguinte:
  - Como o 3 está a multiplicar pelo x, então para o eliminar será necessário dividir o 1.º membro por 3, mas o equilíbrio da equação tem de ser mantido, pelo que também se terá de dividir por 3 o 2.º membro.

- De seguida realizo os cálculos possíveis de modo a simplificar as frações.



- ✓ Posteriormente à resolução da equação, é o momento de introdução do 1.º Princípio de equivalência, dizendo que o método utilizado recorre a este princípio.
- ✓ De seguida, faz-se uma breve comparação com o 1.º Princípio de equivalência, evidenciando o que distingue ambos.
- ✓ Por fim, explicar em que consiste o princípio e o que este nos permite concluir.
  - Explico que o 2.º Princípio de equivalência garante que cada equação que vai surgindo aquando da resolução é equivalente à anterior.



3. Resolução da tarefa 10 da página 31 do manual.

Ver aula síncrona.

4. Exemplo de resolução de uma equação do tipo “$ax + b = c$”, em vídeo.

Em vídeo, resolver a alínea g) da tarefa 10 do manual.

- ✓ Iniciar o vídeo com a justificação do porquê de esta equação estar a ser resolvida.
  - É a primeira vez que surge uma equação do tipo “$ax + b = c$”.
  - Para a resolver, é necessário recorrer a ambos os princípios de equivalência aprendidos, algo que poderá fazer emergir dificuldades aos alunos.
- ✓ Para a resolução desta equação explicar o seguinte:
  - O objetivo mantém-se o mesmo, isolar o x.
  - Como tal, e como neste tipo de equações não é possível num único passo isolá-lo, vamos começar por isolar o termo com x, ou seja, o termo $2x$, aplicando o princípio de equivalência da adição.
  - De seguida, surge a equação $2x = 2$ uma equação do tipo "$ax = b$" cujo método de resolução já é conhecido.

- Apresentar o conjunto solução (S = {1})

5. **Introdução à 2.ª Regra prática, em vídeo.**

Introduzir o vídeo revelando que se vai aprender um novo método de resolução de equações.

- ✓ Resolver a equação utilizando a metodologia aprendida até então com recurso ao 2.º Princípio de equivalência.
- ✓ De seguida, dizer que, recorrendo ao novo método que se vai aprender é possível eliminar o 2.º passo da resolução.
- ✓ Posteriormente, questionar sobre o que acontece do 1.º para o 3.º passo, chegando à conclusão que o 3 que está a multiplicar por x no 1.º membro desaparece. e aparece um 3 a dividir no 2.º membro.
- ✓ Explicar em que consiste este novo método.
  - O número que está a multiplicar pelo x, ou seja, o seu coeficiente, passa para o outro membro a dividir.
- ✓ De seguida, dar nome ao método que se está a abordar, ou seja, regra prática.
- ✓ Introduzir o método fazendo a ponte com a 1.ª regra prática aprendida na aula anterior e novamente indicar que será um método mais prático de resolução de equações por diminuir o número de passos da mesma.
- ✓ Resolver novamente a mesma equação, recorrendo, desta vez à regra prática, ou seja, passando o 3 do 1.º membro para o 2.º a dividir.
- ✓ Por fim, apresentar a regra por escrito.

6. **Resolução da tarefa 11 da página 31 do manual.**

7. **Resolução de um problema.**

   Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

1. **Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.**

Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.

No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Tarefa 10

Alínea a) $\mathbf{4x = 12}$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para todas as alíneas da tarefa 10 e 11)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
- → Aplicar os princípios de equivalência.

- → Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
- → Correta aplicação dos princípios de equivalência.
- → Apresentar sinais de equivalência.
- → Apresentar o conjunto solução.

<u>Apoio a eventuais dificuldades dos alunos</u>: (Análogo para todas as alíneas da tarefa 10 e 11)

Questionar os alunos:

- → É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
- → Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
- → Como conseguimos retirar o 4 de 4x?
- → A qual dos princípios de equivalência vamos recorrer?
- → Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Alínea c) $-4 + x = 12$

Alínea d) $-4x = 12$

Alínea e) $-3x = -15$

Alínea f) $-3 + x = -15$

Tarefa 11.1

Alínea a) $5 + x = 10$

Alínea b) $5x = 10$

Alínea c) $y + 7 = 0$

Alínea d) $7y = 0$

Alínea e) $-3 + 5a = 12$

Alínea f) $-3b + 2 = -7$

Alínea g) $-x = 5$

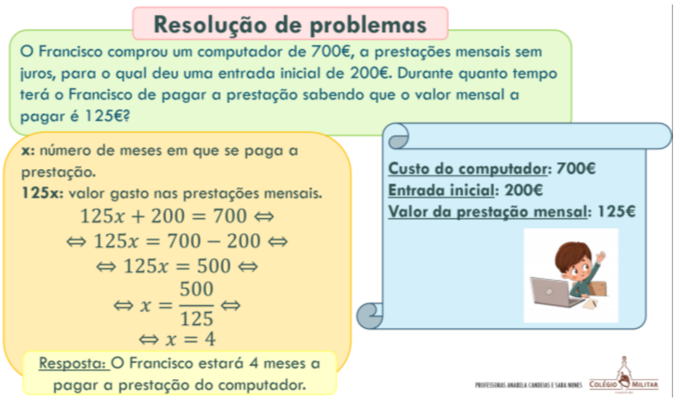
Alínea h) $1 - x = 0$

Alínea i) $-5 = a - 1$

Alínea j) $6 = 2y - 1$

Tarefa 11.2

Resolução de um problema



Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Interpretar o enunciado do problema.
- → Extrair dados do enunciado.
- → Definir a incógnita.
- → Escrever uma equação que traduza o problema.
- → Resolver a equação aplicando corretamente as regras práticas ou princípios de equivalência.
- → Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
- → Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

- → Que dados conseguimos extrair do enunciado?
- → O que representa a incógnita?
- → Que expressões temos de igualar para escrever a equação?
- → Qual a expressão que traduz o valor gasto nas prestações mensais?
- → Qual o valor gasto nas prestações mensais?
- → Se queremos isolar o x, o temos de fazer?
- → A qual dos princípios de equivalência vamos recorrer?
- → O que significa o x=4?
- → Quando terminamos um problema temos sempre de apresentar o quê?

Atividades complementares

Para permitir que o tempo da aula síncrona seja utilizado de forma útil, se a resolução das várias tarefas, bem como o esclarecimento de dúvidas, terminarem mais cedo, os alunos serão incentivados a resolver a tarefa 2 da página 49 do manual até que a aula síncrona termine.

2 Considera a equação:

$$\frac{2}{3}y + 5 = 4y - \frac{1}{3}$$

2.1. Indica:

a) o 1.º membro. $\frac{2}{3}y + 5$

b) a incógnita. y

c) os termos do 2.º membro. $4y;\ -\frac{1}{3}$

d) os termos com incógnita. $\frac{2}{3}y;\ 4y$

2.2. Averigua, sem resolver a equação, se 2 é solução. $\frac{2}{3} \times 2 + 5 = 4 \times 2 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} + \underset{(\times 3)}{5} = \underset{(\times 3)}{8} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} + \frac{15}{3} = \frac{24}{3} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{19}{3} = \frac{23}{3}$ Falso

Resposta: 2 não é solução da equação.

PROFESSORAS ANABELA CANDEIAS E SARA NUNES

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.

Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 11: Plano de aula de 28 de abril de 2020

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 28/04/2020 a 02/05/2020

Aula síncrona: 05/05/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 4 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Equações. • Resolução de exercícios e problemas.

TEMA: Álgebra (ALG7). **SUBDOMÍNIO**: Equações algébricas. **Objetivos de aprendizagem**: - Resolver equações do tipo "$ax + b = cx + d$" utilizando os princípios de equivalência e as regras práticas. - Resolver problemas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Regras práticas. ▪ Princípios de equivalência.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA: ▪ Trabalho individual (aula assíncrona). ▪ Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Exemplo de resolução de uma equação do tipo "$ax + b = cx + d$", em vídeo. 3 Resolução da tarefa 13 da página 32 do manual. 4 Resolução da tarefa 19 da página 35 do manual. 5 Resolução da tarefa 39 da página 41 do manual. 6 Passos a seguir na resolução de problemas envolvendo equações. 7 Resolução da tarefa 44 da página 44 do manual. 8 Resolução da tarefa 50 da página 45 do manual. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Desenvolvimento da aula assíncrona

8. Registo do sumário.

9. Exemplo de resolução de uma equação do tipo "$ax + b = cx + d$", em vídeo.

Em vídeo, apresentar a equação $3x + 4 = 12 - x$.

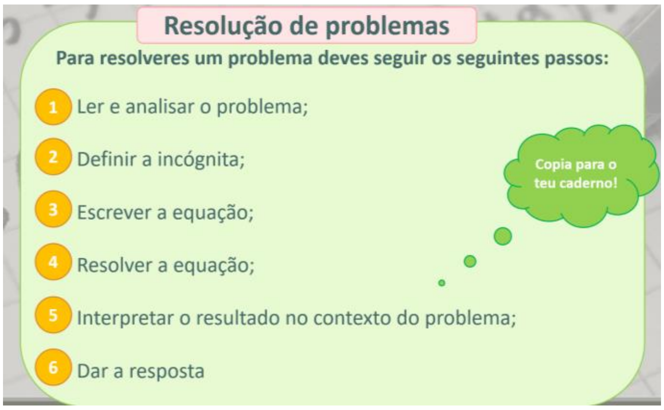
- ✓ Iniciar o vídeo com a justificação do porquê desta equação estar a ser resolvida:
  - Primeira vez que surge uma equação do tipo $ax + b = cx + d$.
  - Uma equação com dois termos com incógnita, um no 1.º membro e outro no 2.º membro.
- ✓ De seguida, proceder à resolução da equação:
  - Definição da estratégia: Isolar o x num dos membros.
  - Colocar todos os termos com x num dos membros, neste caso, foi escolhido o 1.º membro.
  - De seguida identificar e reduzir os termos semelhantes.
  - A equação que se obterá será $4x + 4 = 12$ cuja resolução já é conhecida.
  - Apresentar o conjunto solução (S = {2})

10. Resolução da tarefa 13 da página 32 do manual.
Ver aula síncrona.

11. Resolução da tarefa 19 da página 35 do manual.
Ver aula síncrona.

12. Resolução da tarefa 39 da página 41 do manual.
Ver aula síncrona.

13. Passos a seguir na resolução de problemas envolvendo equações.
Apresentar um slide onde são indicados os seis passos que devem ser seguidos na resolução de problemas envolvendo equações.



14. Resolução da tarefa 44 da página 44 do manual.
Ver aula síncrona.

15. **Resolução da tarefa 50 da página 45 do manual.**
    Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

2. **Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.**
   Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.
   No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Tarefa 13

Alínea b) $4y + 1 = y + 13$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para todas as alíneas da tarefa 13 e 19)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
→ Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
→ Correta aplicação dos princípios de equivalência ou regras práticas.
→ Indicar sinais de equivalência.
→ Apresentar o conjunto solução.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos: (Análogo para todas as alíneas da tarefa 13 e 19)

Questionar os alunos:

→ É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
→ Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
→ Se queremos isolar o y, o que temos e fazer primeiro?
→ Como conseguimos colocar todos os termos com y no 1.º membro?
→ Qual o princípio de equivalência que vamos recorrer?
→ Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Alínea c) $2z - 15 = 5 - 2z$

Alínea d) $-3x - 1 = 15 - 5x$

Alínea e) $2t - 6 = -24 - 7t$

Alínea f) $-8u - 7 = 50 - 5u$

Alínea g) $5a - 7 - a = 9$

Alínea h) $2z + 9 = z + 9$

Alínea i) $5y + 5 = 2y - 1$

Alínea j) $-2x - 3 = 18 + 5x$

Tarefa 19

Alínea a) $4x = 20$

Alínea b) $4 + x = 20$

Alínea c) $3y = 9$

Alínea d) $\frac{x}{3} = 9$

Alínea e) $5y + 3 = 3$

Alínea f) $2x = 3 + 2x$

Alínea g) $4z = 5 - z$

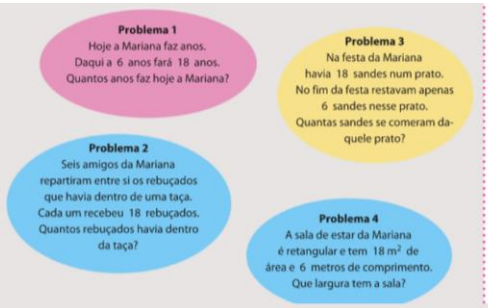
Alínea h) $-8 = 2y + 2$

Alínea i) $8,3 = 3z - 1$

Alínea j) $-2x - 3 = -5x$

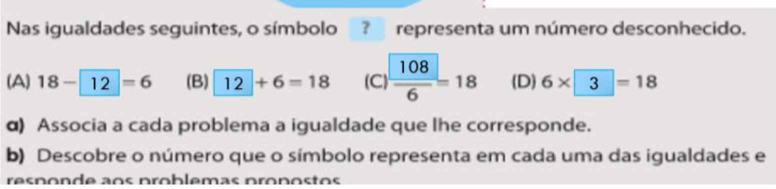
Tarefa 39

Resolução:



A → Problema 3 ou Problema 1
B → Problema 1ou Problema 3
C → Problema 2
D → Problema 4

Respostas:
Problema 1: A Mariana faz hoje 12 anos.
Problema 2: Haviam 108 rebuçados dentro da taça.
Problema 3: Daquele prato comeram-se 12 sandes.
Problema 4: A sala tem 3 metros de largura.



PROFESSORAS ANABELA CANDEIAS E SARA NUNES COLÉGIO MILITAR

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Interpretar corretamente os enunciados dos problemas.
- → Extrair dados dos enunciados.
- → Identificar a equação que traduz cada problema.
- → Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
- → Dar as respostas.

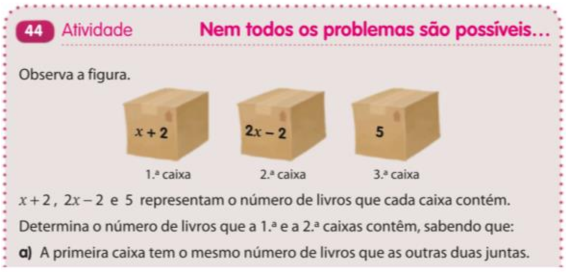
Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

→ Que dados conseguimos extrair do enunciado?
→ Qual a expressão que traduz o problema 1 (2, 3 ou 4)?
→ O que representa o valor encontrado?

Tarefa 44 a)

Resolução:



$$x + 2 = 2x - 2 + 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2x = -2 + 5 - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

1.º caixa: -1+2 = 1 livro
2.º caixa: 2×(-1) – 2 = -2 – 2 = -4 livros?

Este problema é impossível!

Antecipação de dificuldades: (análogo para 44 b))

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Interpretar corretamente o enunciado.
→ Extrair dados do enunciado.
→ Escrever a equação que traduz o problema.
→ Resolver a equação aplicando corretamente as regras práticas ou princípios de equivalência.
→ Substituir o valor de x encontrado nas expressões do número de livros de cada caixa.
→ Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
→ Perceber que uma caixa não pode ter uma quantidade negativa de livros e concluir algo a partir disso.
→ Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades: (análogo para 44 b))

Questionar os alunos:

→ Que dados conseguimos extrair do enunciado?
→ Que expressões temos de igualar para escrever a equação?
→ Qual a expressão que representa o número de livros dentro da 1.ª caixa? E da 2.ª caixa mais a 3.ª caixa?
→ Se queremos isolar o x, o que temos de fazer primeiro?
→ Qual o princípio de equivalência que vamos recorrer?
→ O que significa o x=-1? É já a resposta ao nosso problema?
→ Uma caixa pode ter -4 livros? O que significa isso?
→ Quando terminamos um problema temos sempre de apresentar o que?

Tarefa 44 b)

Resolução:

44 Atividade **Nem todos os problemas são possíveis…**

Observa a figura.

1.ª caixa 2.ª caixa 3.ª caixa

$x+2$, $2x-2$ e 5 representam o número de livros que cada caixa contém.

Determina o número de livros que a 1.ª e a 2.ª caixas contêm, sabendo que:

b) A segunda caixa tem o mesmo número de livros que as outras duas juntas.

$$2x-2=x+2+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-x=2+5+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=9$$

1.º caixa: 9+2 = 11 livros

2.º caixa: 2×9 − 2 = 16 livros

Resposta: Nestas condições, a primeira caixa tem 11 livros e a segunda 16 livros.

Tarefa 50

Resolução:

50 A soma das idades de três irmãos nascidos com intervalos de 4 anos é 51 anos. Qual é a idade do irmão mais velho?

x: *idade do irmão mais velho*

$x-4$: *idade do irmão do meio*

$x-8$: *idade do irmão mais novo*

$$x+x-4+x-8=51 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x-12=51 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=51+12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=63 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{63}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=21$$

Resposta: A idade do irmão mais velho é 21 anos.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Interpretar corretamente o enunciado.
- → Extrair dados do enunciado.
- → Definir a incógnita.
- → Escrever as várias expressões que representam as idades dos irmãos.
- → Escrever a equação que traduz o problema, igualando a soma das idades dos três irmãos a 51.
- → Resolver a equação aplicando corretamente as regras práticas ou princípios de equivalência.
- → Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
- → Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

- → Que dados conseguimos extrair do enunciado?
- → O que representa a incógnita?
- → Qual a expressão que representa a idade do irmão do meio? E do mais novo?
- → Que expressões temos de igualar para escrever a equação?
- → Qual a expressão que traduz a soma das idades dos três irmãos?
- → A soma das idades dos três irmãos é igual a quanto?
- → Temos três termos com incógnita no 1.º membro o que podemos fazer?
- → Se queremos isolar o x, o que temos de fazer primeiro?
- → Qual o princípio de equivalência que vamos recorrer?
- → O que significa o x=21?
- → Quando terminamos um problema temos sempre de apresentar o quê?

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 12: Plano de aula de 5 de maio de 2020

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 05/05/2020 a 09/05/2020

Aula síncrona: 12/05/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 5 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Equações com parêntesis. • Resolução de exercícios e problemas.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Resolver equações com parêntesis.
- Resolver problemas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Regras práticas. ▪ Princípios de equivalência.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; • Raciocinar matematicamente; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

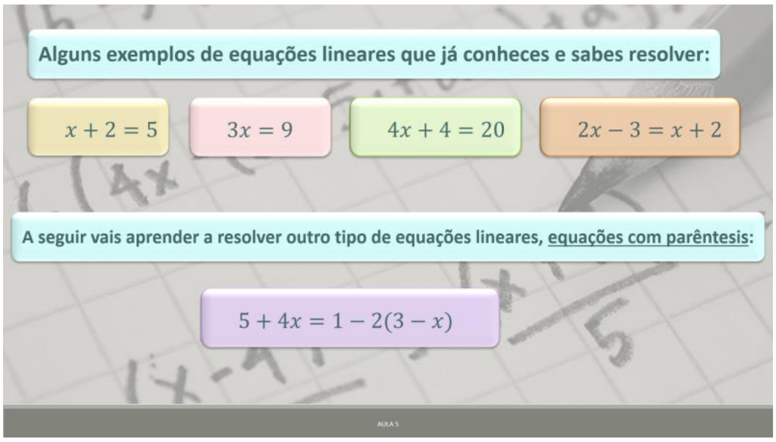
MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Exemplo de resolução de uma equação linear com parêntesis, em vídeo. 3 Cinco passos para resolver uma equação linear. 4 Resolução da tarefa 15 da página 33 do manual. 5 Resolução da tarefa 17 da página 35 do manual. 6 Resolução da tarefa 27 da página 36 do manual. 7 Resolução da ficha de trabalho n.º 2. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Desenvolvimento da aula assíncrona

1. **Registo do sumário.**

2. **Exemplo de resolução de uma equação linear com parêntesis, em vídeo.**

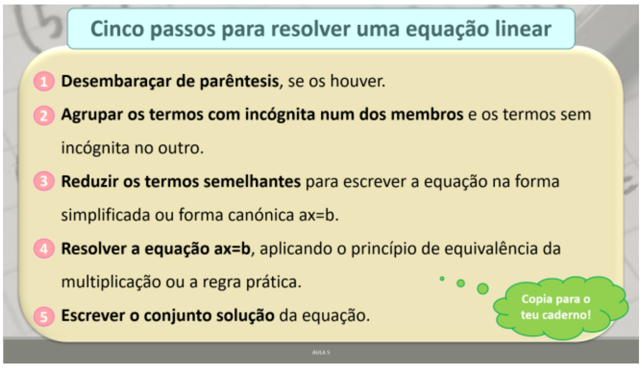
De modo a introduzir o vídeo com a resolução de uma equação com parêntesis, apresentar um slide com os vários tipos de equações lineares que já tínhamos resolvido e, de seguida, a indicação de que vamos aprender a resolver equações lineares com parêntesis.



- ✓ O vídeo pertence aos recursos da plataforma Escola Virtual. No mesmo é resolvida a equação $5 + 4x = 1 - 2 \times (3 - x)$ com recurso às regras práticas.
- ✓ Além disso, no vídeo é explicado que as regras práticas são consequência dos princípios de equivalência e os mesmos são brevemente recordados, sendo feito um cálculo auxiliar com a resolução com recurso aos princípios de equivalência.
- ✓ É ainda relembrado como se verifica se o valor encontrado é mesmo solução da equação, ou seja, substituindo o x da equação inicial pela solução encontrada e verificando se se obtém uma igualdade numérica verdadeira.
- ✓ No final do vídeo são sistematizados os passos utilizados na resolução de equações lineares.

3. Cinco passos para resolver uma equação linear.

No vídeo de resolução de uma equação linear com parêntesis, são apresentados os passos que devem ser seguidos na resolução de equações lineares, passos esses que, com algumas alterações, repeti e apresentei num slide.



4. Resolução da tarefa 15 da página 33 do manual.

Ver aula síncrona.

5. Resolução da tarefa 17 da página 35 do manual.

Ver aula síncrona.

6. Resolução da tarefa 27 da página 36 do manual.

Ver aula síncrona.

7. Resolução da ficha de trabalho n.º 2.

Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

1. **Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.**
Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.
No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Tarefa 15

Alínea a) $\mathbf{4(y-1)-3=13}$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para as restantes alíneas da tarefa 15)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
→ Aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
→ Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
→ Correta aplicação dos princípios de equivalência ou regras práticas.
→ Apresentar sinais de equivalência.
→ Apresentar o conjunto solução.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos: (Análogo para as restantes alíneas da tarefa 15)

Questionar os alunos:

→ É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
→ Qual o primeiro passo na resolução de uma equação com parêntesis?
→ Como desembaraçamos de parêntesis?
→ Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
→ Se queremos isolar o y o que temos de fazer primeiro?
→ A qual princípio de equivalência vamos recorrer?
→ Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Alínea b) $\mathbf{-3(x+1)+2=11}$

Alínea c) $\mathbf{5(2x-1)=4x+11}$

Alínea d) $\mathbf{-3(3-x)=2(x-7)}$

Alínea e) $\mathbf{2-(3-x)=10-3(x+1)}$

Alínea f) $\mathbf{0,5(x+2)=1,5}$

Tarefa 17

Resolução:

17 -1 é solução de alguma das equações seguintes?

(A) $x+5=2(1-x)$ $\quad -1+5=2(1-(-1)) \Leftrightarrow 4=2\times 2 \Leftrightarrow 4=4$

(B) $6x+2=x-4$ $\quad 6\times(-1)+2=-1-4 \Leftrightarrow -6+2=-5 \Leftrightarrow -4=-5$

(C) $-3x=x+1$ $\quad -3\times(-1)=-1+1 \Leftrightarrow 3=0$

Resposta: -1 é solução da equação (A) $x+5=2(1-x)$.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Recordar que podem recorrer à substituição de x por -1 na equação e, em vez disso, resolvem cada equação para obter a sua solução.
→ Dar a resposta após retirar as conclusões necessárias.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

Questionar os alunos:

→ É mesmo necessário resolver a equação para perceber se -1 é solução ou não?
→ A igualdade numérica é verdadeira ou não?
→ Alguma destas equações tem como solução -1? Qual a resposta a dar?

Tarefa 27 $-2(3-x)+3x=3(\frac{1}{3}+x)$

Resolução:

$$-2(3-x)+3x=3(\tfrac{1}{3}+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6+2x+3x=1+3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6+5x=1+3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x-3x=1+6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3\frac{1}{2}$$

$$S=\left\{3\frac{1}{2}\right\}$$

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
→ Aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
→ Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
→ Aplicar os princípios de equivalência ou regras práticas.
→ Transformar uma fração num numeral misto.
→ Indicar sinais de equivalência.
→ Apresentar o conjunto solução.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

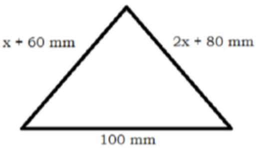
Questionar os alunos:

- → É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
- → Qual o primeiro passo na resolução de uma equação com parêntesis?
- → Como desembaraçamos de parêntesis?
- → Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
- → Se queremos isolar o x o que temos de fazer primeiro?
- → Qual o princípio de equivalência que vamos recorrer?
- → Quantas unidades tem o valor encontrado? E quanto sobra retirando essas unidades?
- → Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Tarefa 1 da ficha de trabalho n.º 2

Resolução:

1. Observe o triângulo abaixo. Poderá este triângulo ser equilátero? Explique o seu raciocínio.



$$x + 60 = 2x + 80 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -20$$
$$S = \{-20\}$$

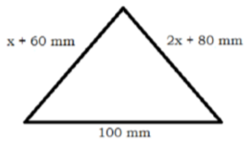
-20 + 60 = 40 mm

-40+80 = 40 mm

Resposta: O triângulo não pode ser equilátero porque não existe nenhum valor de x para o qual todos os lados tenham a mesma medida.

Alternativa de resolução:

1. Observe o triângulo abaixo. Poderá este triângulo ser equilátero? Explique o seu raciocínio.



$$x + 60 = 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 100 - 60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 40$$
$$S = \{40\}$$

$$2x + 80 = 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 100 - 80 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 10$$
$$S = \{10\}$$

Resposta: O triângulo não pode ser equilátero porque não existe nenhum valor de x para o qual todos os lados tenham a mesma medida.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Interpretar corretamente o enunciado do problema.
- → Extrair dados do enunciado.
- → Identificar a equação que permite responder à questão.
- → Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
- → Dar a resposta.

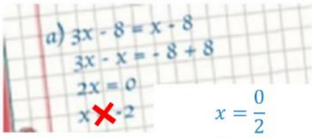
Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

→ Que dados conseguimos extrair do enunciado?
→ Que expressões podemos igualar para garantir que os três lados tenham a mesma medida?

Tarefa 2 a) da ficha de trabalho n.º 2

<u>Resolução:</u>



$$x = \frac{0}{2}$$
$$x = 0$$

<u>Antecipação de dificuldades</u>: (Análogo para as alíneas b), c) e d))

<u>Os alunos poderão ter dificuldades em:</u>

→ Identificar os erros da resolução.
→ Explicar de forma clara e correta o erro cometido.
→ Confrontarem-se com estratégias de resolução um pouco distintas das utilizadas por eles e julgarem ser um erro.

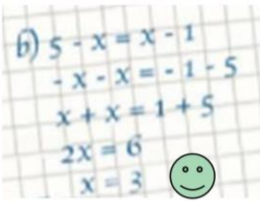
<u>Apoio a eventuais dificuldades</u>: (Análogo para as alíneas b), c) e d))

Questionar os alunos:

→ Porque está errado?
→ Como se corrige o erro?
→ Em que pensou a Inês?
→ Não se pode resolver da forma como a Inês apresentou?

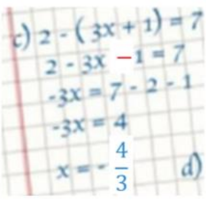
Tarefa 2 b) da ficha de trabalho n.º 2

<u>Resolução:</u>



Tarefa 2 c) da ficha de trabalho n.º 2

<u>Resolução:</u>



$$2 - (3x + 1) = 7$$
$$2 - 3x - 1 = 7$$
$$-3x = 7 - 2 + 1$$
$$-3x = 6$$
$$x = -\frac{6}{3}$$
$$x = -2$$

Tarefa 2 d) da ficha de trabalho n.º 2

Resolução:

d) $1 - 2(x - 1) = 6$

$1 - 2x + 2 = 6$

$-2x = 6 - 3$

$-2x = 3$

$x = -\frac{3}{2}$

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 13: Plano de aula de 12 de maio de 2020

Colégio Militar
Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 12/05/2020 a 13/05/2020

Aula síncrona: 15/05/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 6 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Classificação de equações lineares. • Resolução de exercícios e problemas.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Classificar Equações lineares.
- Resolver problemas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Regras práticas. ▪ Princípios de equivalência.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

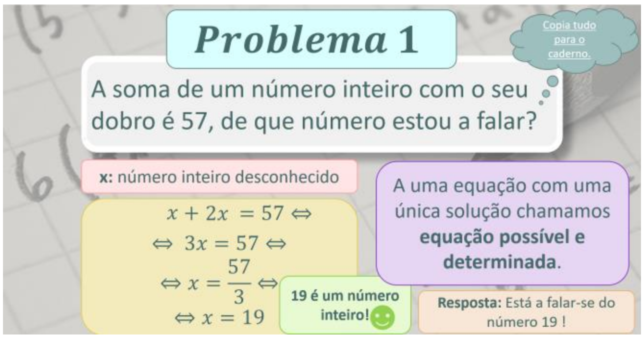
MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Problema envolvendo uma equação linear possível e determinada, em vídeo. 3 Problema envolvendo uma equação linear impossível, em vídeo. 4 Problema envolvendo uma equação linear possível e indeterminada, em vídeo. 5 Sistematização sobre a classificação de equações lineares. 6 Resolução de tarefas do manual. 7 Resolução de um problema. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Desenvolvimento da aula assíncrona

1. **Registo do sumário.**

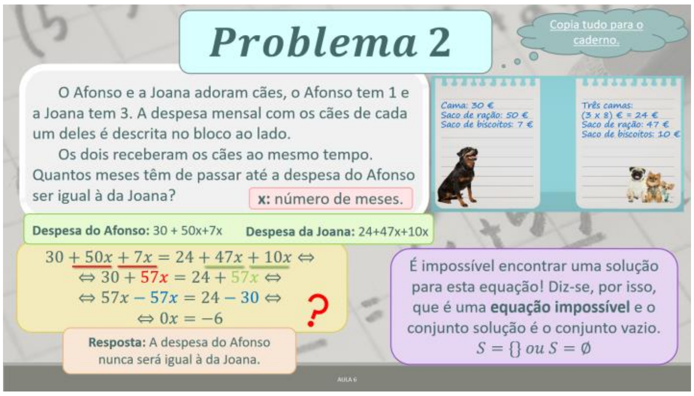
2. **Problema envolvendo uma equação linear possível e determinada, em vídeo.**
Em vídeo, apresentar o problema 1 que será resolvido tendo em consideração os passos para a resolução de problemas abordados na 4.ª aula à distância.

- ✓ Começar por definir a incógnita.
- ✓ De seguida escrever a equação que traduz o problema e resolver aplicando as regras práticas.
- ✓ Por fim, verificar a validade da resposta no contexto do problema e dar a resposta.
- ✓ Concluir que a equação que traduz o problema tem uma única solução e indicar que uma equação com essa característica designa-se por equação possível e determinada.



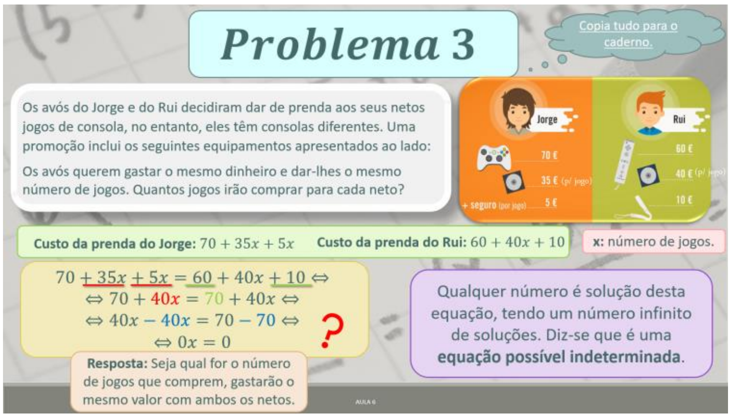
3. **Problema envolvendo uma equação linear impossível, em vídeo.**
Em vídeo, apresentar o problema 2.

- ✓ Começar por definir a incógnita.
- ✓ De seguida definir as duas expressões a igualar que correspondem às despesas do Afonso e da Joana.
- ✓ Escrever a equação que traduz o problema e resolver aplicando a regra prática.
- ✓ Concluir que a equação que traduz o problema não tem solução e indicar que uma equação com essa característica designa-se por equação impossível.
- ✓ Dar a resposta ao problema com base no facto mencionado.



4. **Problema envolvendo uma equação linear possível e indeterminada, em vídeo.**
Em vídeo, apresentar o problema 3.

- ✓ Começar por definir a incógnita.
- ✓ De seguida definir as duas expressões a igualar que correspondem ao custo da prenda dos dois netos.
- ✓ Escrever a equação que traduz o problema e resolver aplicando a regra prática.
- ✓ Concluir que a equação que traduz o problema tem infinitas soluções e indicar que uma equação com essa característica designa-se por equação possível e indeterminada.
- ✓ Dar a resposta ao problema com base no facto mencionado.



5. **Sistematização sobre classificação de equações lineares.**
   De modo a sistematizar as classificações de equações a abordar nos vídeos referidos anteriormente elaborar um esquema.

   - ✓ As equações lineares podem ser possíveis ou impossíveis, caso tenham ou não solução, respetivamente.
   - ✓ As equações lineares possíveis podem ainda ser determinadas ou indeterminadas, consoante o número de soluções. É uma equação possível e determinada se tiver uma única solução e uma equação possível e indeterminada caso tenha infinitas soluções.

6. **Resolução de tarefas do manual.**
   Realizar as tarefas 21, 22 e 24 da página 35 do manual e tarefa 25 da página 36 do manual.

   Ver resolução na aula síncrona.

7. **Resolução de um problema.**
   Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

1. **Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.**
   Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.
   No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

   Página 35 do manual

Tarefa 21

Alínea a) $\mathbf{2(1+z)=2z+2}$

Equação possível e indeterminada

(Qualquer valor é solução desta equação)

<u>Antecipação de dificuldades</u>: (Análogo para as restantes alíneas da tarefa 21)

<u>Os alunos poderão ter dificuldades em:</u>

- → Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
- → Aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
- → Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
- → Correta aplicação dos princípios de equivalência ou regras práticas.
- → Apresentar sinais de equivalência.
- → Apresentar o conjunto solução.
- → Classificar corretamente a equação relativamente ao número de soluções.

<u>Apoio a eventuais dificuldades dos alunos</u>: (Análogo para as restantes alíneas da tarefa 21)

Questionar os alunos:

- → É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
- → Qual o primeiro passo na resolução de uma equação com parêntesis?
- → Como desembaraçamos de parêntesis?
- → Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
- → Se queremos isolar o z o que temos de fazer primeiro?
- → Qual o princípio de equivalência que vamos recorrer?
- → Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?
- → A equação tem solução ou não?
- → Quantas soluções tem?

Alínea b) $\mathbf{-x+3,2=-x-x}$

Equação possível e determinada

Alínea c) $\mathbf{-x+2x-2,5=x+5}$

Equação impossível

Alínea d) $\mathbf{-2(x+0,5)=5x-1}$

Equação possível e determinada

Tarefa 22 da página 35 do manual

<u>Resolução:</u>

22 O 1.º membro de uma equação é $x + 5$.

Escreve o 2.º membro, de modo que, em $\mathbb{Q}$, a equação:

a) tenha uma solução. *Exemplo*: $x + 5 = 10$

b) tenha um número infinito de soluções. $x + 5 = x + 5$

c) não tenha solução. *Exemplo*: $x + 5 = x + 4$

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Definição de uma estratégia de resolução.
→ Conhecimento das características das equações para cada uma das situações.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

Questionar os alunos:

→ Que característica tem de ter a equação para ter um número infinito de soluções? E para que não tenha solução?

Tarefa 24 da página 35 do manual

Resolução:

24 Verifica se o perímetro do quadrado pode ser igual ao perímetro do retângulo.

Perímetro do quadrado: $4(2x+5)$
Perímetro do retângulo: $2(3x+1)+2(x+2)$

$$\begin{gathered}4(2x+5) = 2(3x+1)+2(x+2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x+20 = 6x+2+2x+4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x+20 = 8x+6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x-8x = 6-20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0x = -14 \\ S = \{\}\end{gathered}$$

Equação impossível

Resposta: O perímetro do quadrado não pode ser igual ao perímetro do retângulo.

Antecipação de dificuldades: (Análogo para as tarefas 25 e 4)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Interpretar o enunciado do problema.
→ Extrair dados do enunciado.
→ Escrever a expressão algébrica do perímetro de cada figura.
→ Identificar a equação que traduz o problema.
→ Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
→ Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

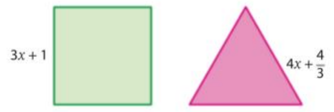
→ Que dados conseguimos extrair do enunciado?
→ O que é o perímetro de uma figura?
→ Quais as expressões que traduzem o perímetro de cada figura?
→ Que expressões temos de igualar para obter a equação que traduz o problema?

→ Tendo em conta o resultado obtido, que resposta se dá ao problema?

Tarefa 25 da página 36 do manual

Resolução:

25 Verifica se o perímetro do quadrado pode ser igual ao perímetro do triângulo equilátero.



Resposta: O perímetro do quadrado é igual ao perímetro do triângulo seja qual for o valor de x.

Perímetro do quadrado: $4(3x+1)$

Perímetro do triângulo: $3\left(4x+\frac{4}{3}\right)$

$$4(3x+1)=3\left(4x+\frac{4}{3}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12x+4=12x+4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12x-12x=4-4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0x=0$$

Equação possível e indeterminada

Problema 4 a)

Resolução:

x: *medida do lado do hexágono em cm*

$x+1$: *medida do lado do triângulo em cm*

$6x$: *Perímetro do hexágono*

$3(x+1)$: *Perímetro do triângulo*

$$6x=2\times 3(x+1)$$

Problema 4 b)

Resolução:

$$6x=2\times 3(x+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x=6(x+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x=6x+6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x-6x=6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0x=6$$

S={} Impossível

A afirmação do João é falsa, não existem figuras nestas condições.

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 14: Plano de aula de 15 de maio de 2020

COLÉGIO MILITAR

Fundado em 1803

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Ano: 7.º Turma: B

Aula assíncrona: 15/05/2020 a 17/05/2020

Aula síncrona: 19/05/2020 e 22/05/2020 (45 + 45 minutos)

LIÇÃO Nº: 7 (Aulas à distância) **ALUNOS EM FALTA:**	**SUMÁRIO:** • Equações com denominadores. • Resolução de exercícios e problemas.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Ter conhecimento de como resolver equações com denominadores.
- Resolver problemas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**CAPACIDADES TRANSVERSAIS**
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Regras práticas. ▪ Princípios de equivalência.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

RECURSOS	
DA PROFESSORA	DO ALUNO
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Exemplo de resolução de uma equação com denominadores, em vídeo. 3 Resolução da tarefa 35 da página 37 do manual. 4 Resolução da tarefa 37 da página 39 do manual. 5 Exemplo de resolução de uma equação com denominadores e parêntesis, em vídeo. 6 Resolução de tarefas do manual. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

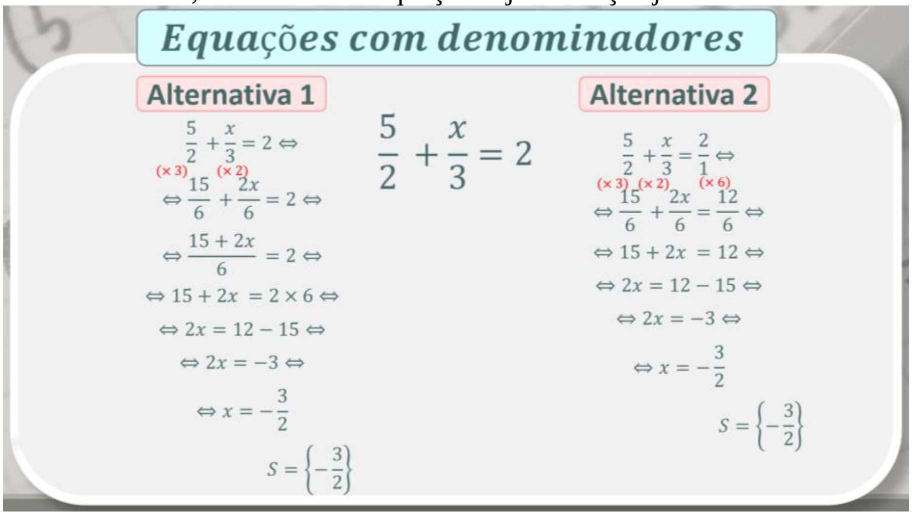
Desenvolvimento da aula assíncrona

1. **Registo do sumário.**

2. **Exemplo de resolução de uma equação com denominadores, em vídeo.**
   Em vídeo, apresentar duas alternativas de resolução a uma equação com denominadores:

   ✓ A primeira estratégia consiste em reduzir ao mesmo denominador apenas os termos do 1.º membro da equação e, posteriormente, aplicar a regra prática, passando o número que está no denominador, a multiplicar para o 2.º membro, obtendo uma equação cuja resolução já é conhecida.

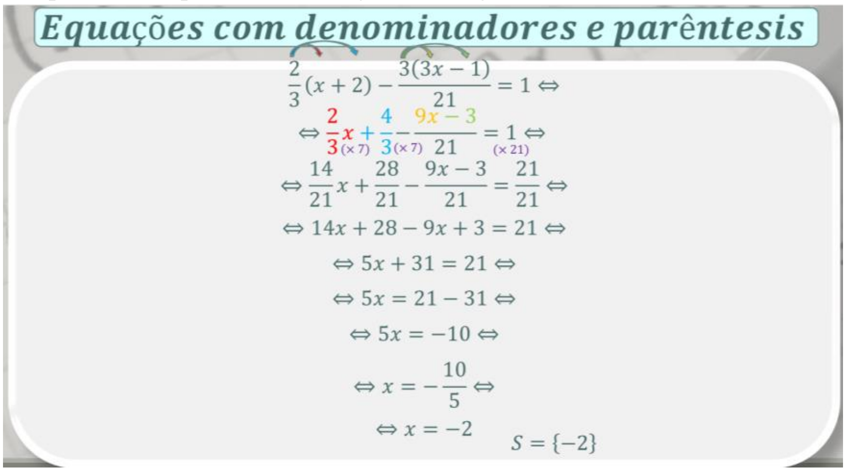
- ✓ A segunda estratégia consiste em reduzir ao mesmo denominador todos os termos da equação. Posteriormente, devido aos princípios de equivalência, como todos os termos têm o mesmo denominador este pode ser eliminado e mais uma vez, obtém-se uma equação cuja resolução já é conhecida dos alunos.



3. **Resolução da tarefa 35 da página 37 do manual.**
   Ver aula síncrona.

4. **Resolução da tarefa 37 da página 39 do manual.**
   Ver aula síncrona.

5. **Exemplo de resolução de uma equação com denominadores e parêntesis, em vídeo.**
   Em vídeo, apresentar a resolução de uma equação com denominadores e parêntesis.
   - ✓ Relembrar que na resolução de equações o primeiro passo é sempre desembaraçar de parêntesis, quando os há.
   - ✓ De seguida, proceder à eliminação dos denominadores aplicando uma das estratégias abordadas no primeiro vídeo desta aula.
   - ✓ Por fim, resolver a equação aplicando os princípios de equivalência ou regras práticas e apresentar o conjunto solução.



6. Resolução de tarefas do manual.

Ver resolução na aula síncrona.

- ✓ Tarefa 38 da página 40 do manual;
- ✓ Tarefa 41 da página 43 do manual;
- ✓ Tarefa 87 da página 51 do manual;
- ✓ Tarefa 88 da página 51 do manual.

Desenvolvimento da aula síncrona

1. Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.

No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Tarefa 35.1

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
- → Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
- → Aplicar os princípios de equivalência.
- → Apresentar sinais de equivalência.
- → Apresentar o conjunto solução.

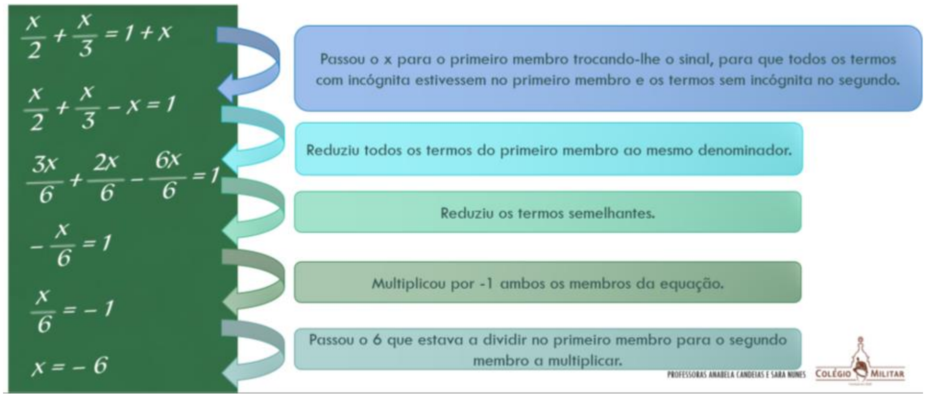
Apoio a eventuais dificuldades dos alunos:

Questionar os alunos:

- → É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
- → Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
- → Se queremos isolar o x o que temos de fazer primeiro?
- → A qual princípio de equivalência vamos recorrer?
- → Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Tarefa 35.2 a)

Resolução:



Antecipação de dificuldades: (Análogo para 35.2 b))

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Atender a cada passagem da resolução.
→ Descrever cada passagem.
→ Atender se a redução ao mesmo denominador é realizada em apenas um membro ou em ambos e indicar.
→ Utilizar linguagem adequada.
→ Compreender o que acontece de uma passagem para outra.

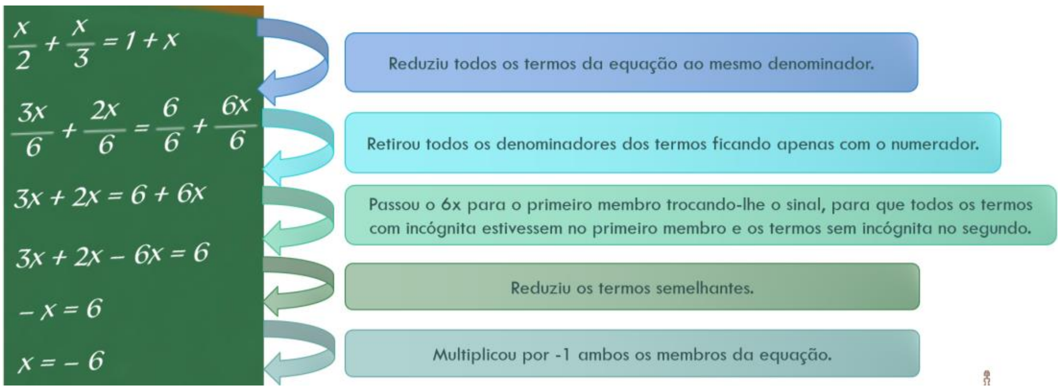
Apoio a eventuais dificuldades dos alunos: (Análogo para 35.2 b))

Questionar os alunos:

→ O que ocorre da primeira passagem para a segunda?
→ Reduziu ao mesmo denominador todos os termos da equação ou apenas de um dos membros?
→ Em vez de dizer "fez as contas" podemos dizer de outra forma, qual?
→ Como é que o -1 se transforma em -6, que operação está envolvida?

Tarefa 35.2 b)

Resolução:



Tarefa 35.3 $\frac{2}{3}x+5=2x$

Resolução:

$$\frac{2}{3}x + 5 = 2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2x}{1_{(\times 3)}} = -5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}x = -5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = -5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x = -5 \times 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x = -15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-15}{-4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$$
$$S = \left\{\frac{15}{4}\right\}$$

<u>Alternativa de resolução:</u>

$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{1_{(\times 3)}} = \frac{2x}{1_{(\times 3)}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{15}{3} = \frac{6}{3}x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x + 15 = 6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 6x = -15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x = -15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-15}{-4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$$
$$S = \left\{\frac{15}{4}\right\}$$

<u>Antecipação de dificuldades</u>: (Análogo para todas as alíneas das tarefas 37.2 e 38.1)

<u>Os alunos poderão ter dificuldades em:</u>

→ Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
→ Verificar se existem parêntesis e, em caso afirmativo, aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
→ Saber que denominador tem de ser comum a todos os termos da equação.
→ Reduzir todos os termos da equação ao mesmo denominador ou apenas os termos de um dos membros.
→ Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
→ Aplicar os princípios de equivalência ou regras práticas.
→ Indicar sinais de equivalência.
→ Apresentar o conjunto solução.

<u>Apoio a eventuais dificuldades dos alunos</u>: (Análogo para todas as alíneas das tarefas 37.2 e 38.1)

Questionar os alunos:

→ É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
→ Qual o primeiro passo na resolução de uma equação com parêntesis?
→ Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
→ Se queremos isolar o x o que temos de fazer primeiro?
→ A qual princípio de equivalência vamos recorrer?
→ Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Tarefa 37.1

Resolução:

$$3x + 80 - 2(x + 8) = 252 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 80 - 2x - 16 = 252 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 64 = 252 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 252 - 64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 188$$
$$S = \{188\}$$

Altura da Joana: $\frac{188+8}{2} = 98\ cm$

Altura da mãe: $\frac{3\times188+80}{4} = 161\ cm$

Alternativa de resolução:

$$\frac{3x + 80}{4} - \frac{x + 8}{2} = \frac{63}{1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x + 80}{4} - \frac{2x + 16}{4} = \frac{252}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 80 - 2x - 16 = 252 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 64 = 252 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 252 - 64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 188$$
$$S = \{188\}$$

Altura da Joana: $\frac{188+8}{2} = 98\ cm$

Altura da mãe: $\frac{3\times188+80}{4} = 161\ cm$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para todas as alíneas da tarefa 37.2)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
- → Verificar se existem parêntesis e, em caso afirmativo, aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
- → Saber que denominador tem de ser comum a todos os termos da equação.
- → Reduzir todos os termos da equação ao mesmo denominador ou apenas os termos de um dos membros.
- → Distinguir qual o princípio de equivalência a utilizar.
- → Aplicar os princípios de equivalência ou regras práticas.
- → Indicar sinais de equivalência.
- → Apresentar o conjunto solução.
- → Dar a resposta ao problema.

Apoio a eventuais dificuldades dos alunos: (Análogo para todas as alíneas da tarefa 37.2)

Questionar os alunos:

- → É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
- → Qual o primeiro passo na resolução de uma equação com parêntesis?
- → Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
- → Se queremos isolar o x o que temos de fazer primeiro?
- → A qual princípio de equivalência vamos recorrer?
- → Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?
- → Qual a resposta ao problema?

Tarefa 37.2

Alínea a) $\frac{2-3x}{6} = \frac{x+3}{6}$

Alínea b) $-\frac{1}{3}x + 3 = \frac{5}{2}x$

Alínea c) $\frac{2-x}{3} = \frac{5+x}{5}$

Alínea d) $\frac{x-5}{4} + \frac{2+x}{3} = \frac{1}{2}$

Alínea e) $\frac{x+4}{2} - 1 = \frac{x}{6}$

Alínea f) $\frac{8x}{3} - \frac{20-6x}{15} = 4x$

Tarefa 38.1

Alínea a) $\frac{2(x+1)}{5} = \frac{3-5x}{2}$

Alínea b) $-\frac{2}{3}(x+1) = \frac{2(1-x)}{9}$

Alínea c) $\frac{1}{2}(x+1) = -2 - \frac{3+2x}{3}$

Alínea d) $\frac{2-x}{3} - \frac{5}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 1$

Tarefa 38.2 $2(x - 0,1) = \frac{1}{2} + x$

Resolução:

$$2(0{,}7 - 0{,}1) = \frac{1}{2} + 0{,}7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1{,}2 = 0{,}5 + 0{,}7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1{,}2 = 1{,}2$$
$$Verdadeiro$$

Resposta: 0,7 é solução da equação.

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Substituir na equação dada o valor pedido.
- → Retirar conclusões do resultado obtido.
- → Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

- → Como conseguimos verificar se 0.7 é solução da equação?
- → Ao substituir o x por 0.7 o que se obtém?
- → Concluímos que 0.7 é solução da equação ou não?

Tarefa 41 a)

Resolução:

x: *total de gomas*

A Manuela recebeu $\frac{2}{5}x$ gomas

O Afonso recebeu $\frac{1}{3}x$ gomas

O Rui recebeu 20 gomas

$$\frac{2}{5_{(\times 3)}}x + \frac{1}{3_{(\times 5)}}x + \frac{20}{1_{(\times 15)}} = \frac{x}{1_{(\times 15)}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{15}x + \frac{5}{15}x + \frac{300}{15} = \frac{15x}{15} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x + 5x + 300 = 15x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11x + 300 = 15x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11x - 15x = -300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x = -300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-300}{-4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 75$$

<u>Resposta:</u> Repartiram 75 gomas. $S = \{75\}$

Antecipação de dificuldades: (Análogo para a tarefa 87 e 88)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Ter uma correta interpretação do enunciado do problema.
- → Definir a incógnita.
- → Extrair dados do enunciado.
- → Identificar a equação que traduz o problema.
- → Resolver a equação.
- → Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
- → Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para a tarefa 87 e 88)

Questionar os alunos:

- → Que dados conseguimos extrair do enunciado?
- → Qual a incógnita? Que valor não conhecemos?
- → Que expressões podemos igualar?
- → O que representa o valor encontrado?
- → Qual a resposta ao problema?

Tarefa 41 b)

Resolução:

A Manuela recebeu $\frac{2}{5} \times 75 = 30$ gomas

O Afonso recebeu $\frac{1}{3} \times 75 = 25$ gomas

O Rui recebeu 20 gomas

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Substituir o x das expressões que indicam o número de gomas com que cada menino ficou pelo número total de gomas descoberto na alínea a).

<u>Apoio a eventuais dificuldades</u>:

Questionar os alunos:

→ Como descobrimos com quantas gomas ficou cada menino?
→ Precisamos de usar alguns dos dados ou resultados da alínea a)? Quais?

Tarefa 87

<u>Resolução:</u>

x: *número de alunos da turma*

$$\frac{1}{3_{(\times 3)}}x + \frac{1}{9}x + \frac{15}{1_{(\times 9)}} = \frac{x}{1_{(\times 9)}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{9}x + \frac{1}{9}x + \frac{135}{9} = \frac{9x}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + x + 135 = 9x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x + 135 = 9x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x - 9x = -135 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5x = -135 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-135}{-5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 27$$
$$S = \{27\}$$

<u>Resposta</u>: A turma tem 27 alunos.

Tarefa 88

<u>Resolução:</u>

x: *dinheiro inicial da Marta*

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2_{(\times 3)}}x + \frac{1}{3_{(\times 2)}}x + \frac{1}{2_{(\times 3)}} = \frac{x}{1_{(\times 6)}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x + \frac{3}{6} = \frac{6}{6}x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + 2x + 3 = 6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x + 3 = 6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x - 6x = -3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3}{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$
$$S = \{3\}$$

<u>Resposta</u>: A Marta tinha 3 euros.

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
▪ Operações aritméticas. ▪ Simplificação de expressões algébricas. ▪ Regras práticas. ▪ Princípios de equivalência.	▪ Comunicar escrita e oralmente processos e ideias matemáticas; • Justificar; ▪ Evidenciar espírito critico.

METODOLOGIA DA AULA:

- Trabalho individual (aula assíncrona).
- Discussão e sistematização de ideias em grupo turma (aula síncrona).

Anexo 15: Plano de aula de 19 de maio de 2020

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Professora estagiária: Sara Nunes

Aula assíncrona: 19/05/2020 a 23/05/2020

Aula síncrona: 26/05/2020 (45 minutos)

Ano: 7.º Turma: B

LIÇÃO Nº: 8 (Aulas à distância)	SUMÁRIO:
ALUNOS EM FALTA:	• Consolidação de conhecimentos sobre equações. • Resolução de exercícios e problemas.

TEMA: Álgebra (ALG7).

SUBDOMÍNIO: Equações algébricas.

Objetivos de aprendizagem:
- Consolidar a resolução de equações.
- Resolver problemas.

RECURSOS	
DA PROFESSORA	**DO ALUNO**
▪ Tarefa Escola Virtual; ▪ Tabelas de registo de participação; ▪ IPad.	▪ Manual; ▪ Caderno diário; ▪ IPad.

MOMENTOS DA AULA
Aula assíncrona 1 Registo do sumário. 2 Resolução de tarefas do manual. 3 Resolução da ficha de trabalho n.º 3. **Aula síncrona** 1 Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.

Desenvolvimento da aula assíncrona

1. **Registo do sumário.**

2. **Resolução de tarefas do manual.**
   Ver resolução na aula síncrona.
   - ✓ Tarefa 81 da página 50 do manual;
   - ✓ Tarefa 82 da página 50 do manual;
   - ✓ Tarefa 105 da página 54 do manual;
   - ✓ Tarefa 112 da página 54 do manual;
   - ✓ Tarefa 117 da página 55 do manual.

3. **Resolução da ficha de trabalho n.º 3.**
   Ver aula síncrona.

Desenvolvimento da aula síncrona

2. **Resolução de cada tarefa sugerida na aula assíncrona.**
   Preparar um PowerPoint com a resolução de todas as tarefas propostas na aula assíncrona com o objetivo de esclarecer dúvidas aos alunos. Para que a aula seja dinâmica, introduzir no PowerPoint animações que não permitem que a resolução apareça por completo, de modo a incentivar à participação dos alunos e a serem estes a explicar o passo seguinte de cada resolução.
   No fim de cada resolução, questionar se ainda persistem dúvidas e esclarecer as que forem surgindo.

Tarefa 81

Alínea a) $\boldsymbol{3y + \frac{1}{5} = \frac{2}{3}}$

<u>Antecipação de dificuldades</u>: (Análogo para todas as alíneas das tarefas 81 e 82)

<u>Os alunos poderão ter dificuldades em:</u>

→ Atender se no enunciado é pedido para utilizar uma metodologia de resolução específica ou não.
→ Verificar se existem parêntesis e, em caso afirmativo, aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
→ Saber que denominador tem de ser comum a todos os termos da equação.
→ Reduzir todos os termos da equação ao mesmo denominador ou apenas os termos de um dos membros.
→ Distinguir quando utilizar o princípio de equivalência da adição e multiplicação.
→ Correta aplicação dos princípios de equivalência ou regras práticas.
→ Apresentar sinais de equivalência.
→ Apresentar o conjunto solução.

<u>Apoio a eventuais dificuldades dos alunos</u>: (Análogo para todas as alíneas das tarefas 81 e 82)

Questionar os alunos:

→ É pedida alguma metodologia de resolução no enunciado?
→ Qual o primeiro passo na resolução de uma equação com parêntesis?
→ Qual o objetivo de resolvermos uma equação?
→ Se queremos isolar o x o que temos de fazer primeiro?
→ Vamos recorrer ao princípio de equivalência da adição ou multiplicação?
→ Quando terminamos a resolução de uma equação o que temos de apresentar?

Alínea b) $\boldsymbol{\frac{2}{5}x + 5 = 4x - \frac{1}{5}}$

Alínea c) $\boldsymbol{\frac{1}{2}a - \frac{3}{2} = 12}$

Alínea d) $\boldsymbol{\frac{2x}{3} - 2 = x - \frac{2x-1}{3}}$

Alínea e) $\boldsymbol{\frac{5x+7}{5} - \frac{3+2x}{2} = 1}$

Alínea f) $\boldsymbol{z + \frac{3z+6}{6} = 3 - \frac{5z-7}{3}}$

Tarefa 82

Alínea a) $\frac{2}{3}(x+2) - 3\frac{(3x-1)}{21} = 1$

Alínea b) $\frac{4x+1}{10} = -1 - 0,1(x-6)$

Alínea c) $-\frac{2}{7}(14x - 21) = 1 + \frac{3}{4}(20x + 8)$

Alínea d) $\frac{4(x-1)}{3} - \frac{2x-3}{2} = 0,5$

Alínea e) $-\frac{3(5-x)}{8} = 2 - \frac{4(1-0,5x)}{2}$

Alínea f) $\frac{1}{12} - \frac{0,1(20x+10)}{6} = \frac{x}{8}$

Tarefa 105 da página 54 do manual

Resolução:

y: número de porcos.
$y+6$: número de patos.
$4y$: número de patas de porcos.
$2(y+6)$: número de patas de patos.

$$4y + 2(y+6) = 180 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4y + 2y + 12 = 180 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6y + 12 = 180 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6y = 180 - 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6y = 168 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{168}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 28$$
$$S = \{28\}$$

número de patos: $28 + 6 = 34$

Resposta: Há 34 patos na quinta

Antecipação de dificuldades: (Análogo para a tarefa 112 e 117)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

- → Ter uma correta interpretação do enunciado do problema.
- → Definir a incógnita.
- → Extrair dados do enunciado.
- → Identificar a equação que traduz o problema.
- → Resolver a equação.
- → Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
- → Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para a tarefa 112 e 117)

Questionar os alunos:

- → Que dados conseguimos extrair do enunciado?
- → Qual a incógnita? Que valor não conhecemos?
- → Que expressões podemos igualar?
- → O que representa o valor encontrado?
- → Qual a resposta ao problema?

Tarefa 112 da página 54 do manual

Resolução:

a) x: *Preço de cada iogurte* em euros

$$\underbrace{6x-0{,}60}_{\text{Quantia que levei.}}=\underbrace{5x+0{,}25}_{\text{Quantia que levei.}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x-5x=0{,}25+0{,}60\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0{,}85$$

$$S=\{0{,}85\}$$

Resposta: Um iogurte custa 85 cêntimos.

b) $6\times 0{,}85-0{,}60=4{,}5$

ou

$5\times 0{,}85+0{,}25=4{,}5$

Resposta: A quantia que levei para o supermercado foi 4 euros e meio.

Tarefa 117 da página 55 do manual

Resolução:

$6\ euros = 600\ cêntimos$

$\dfrac{600}{20}=\mathbf{30}\ moedas\ de\ 20\ cent.$

x: *idade do Mário*

$2x$: *idade do João*

$x+2$: *idade da Carla*

$$x+2x+x+2=30\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+2=30\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x=30-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x=28\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{28}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=7$$

$$S=\{7\}$$

Resposta: O Mário ficou com 7 moedas de 20 cent.
O João ficou com 2×7, ou seja, 14 moedas de 20 cent.
A Carla ficou com $7+2$, ou seja, 9 moedas de 20 cent.

Ficha de trabalho n.º 3

Tarefa 1 a)

Resolução:

i. o custo dos pares de calças;

$2c$: *preço de dois pares de calças*

ii. o custo de um vestido;

Vestido: menos 10 euros que o par de calças

$c-10$: *preço de um vestido*

iii. o dinheiro que a Maria gastou no total.

$3(c-10)+2c+50$

Antecipação de dificuldades:

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Ter uma correta interpretação do enunciado do problema.
→ Definir a incógnita.
→ Extrair dados do enunciado.
→ Traduzir numa expressão o texto do enunciado.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

→ Que dados conseguimos extrair do enunciado?
→ Qual a incógnita?

Tarefa 1 b)

Resolução:

$$3(c-10)+2c+50=220 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3c-30+2c+50=220 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5c+20=220 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5c=220-20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5c=200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c=\frac{200}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c=40$$
$$S=\{40\}$$

Custo de cada vestido: 40-10 = 30 euros.

Resposta: Cada par de calças custou 40 euros, cada vestido 30 euros e os sapatos custaram 50 euros.

Antecipação de dificuldades: (Análogo para a tarefa 87 e 88)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Identificar a equação que traduz o problema.
→ Resolver a equação.
→ Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
→ Substituir o c da expressão que indica o custo do vestido.
→ Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades:

Questionar os alunos:

→ Precisamos de usar alguns dos dados ou resultados da alínea a) para construir a equação? Quais?
→ O que representa o valor encontrado?
→ Como descobrimos quanto custa o vestido?
→ Qual a resposta ao problema?

Tarefa 2

Resolução:

x: número de votos no parque aventuras
x-2: número de votos no jardim zoológico
2(x-2): número de votos no parque aquático

$$x + x - 2 + 2(x - 2) = 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + x - 2 + 2x - 4 = 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x - 6 = 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = 30 + 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = 36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{36}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 9$$
$$S = \{9\}$$

9: número de votos no parque aventuras
9-2=7: número de votos no jardim zoológico
2(9-2)=14: número de votos no parque aquático

Resposta: A visita de estudo será no parque aquático.

Antecipação de dificuldades: (Análogo para a tarefa 87 e 88)

Os alunos poderão ter dificuldades em:

→ Ter uma correta interpretação do enunciado do problema.
→ Definir a incógnita.
→ Extrair dados do enunciado.
→ Identificar a equação que traduz o problema.
→ Resolver a equação.
→ Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
→ Substituir o x das expressões para descobrir o número de votos de cada local.
→ Dar a resposta.

Apoio a eventuais dificuldades: (Análogo para a tarefa 87 e 88)

Questionar os alunos:

→ Que dados conseguimos extrair do enunciado?
→ Qual a incógnita? Que valor não conhecemos?
→ Que expressões podemos igualar?
→ O que representa o valor encontrado?
→ Qual a resposta ao problema?

Avaliação

- ✓ Todas as resoluções dos alunos das tarefas da aula assíncrona serão enviadas para mim.
- ✓ Irei dar feedback escrito das mesmas, corrigindo e escrevendo um breve comentário com aspetos a melhorar que será partilhado com os alunos através da plataforma Teams.
- ✓ Avaliação do empenho dos alunos através da participação que será registada em tabelas de participação, utilizadas regularmente nas aulas síncronas.

Anexo 16: Termo de consentimento informado dirigido aos Encarregados de Educação

REASON

Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Termo de consentimento informado, livre e esclarecido

Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

A turma do seu educando foi selecionada para participar no projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores[1], que pretende estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para um ensino da Matemática que promova o raciocínio matemático dos alunos. Esta investigação é muito importante uma vez que pode contribuir para estudar formas de apoiar os professores no desenvolvimento do raciocínio matemático dos seus alunos. Com base nos resultados deste estudo, produziremos materiais para apoiar os professores na promoção do raciocínio matemático da sala de aula.

O que está envolvido na participação do meu educando nesta investigação?

O(A) professor(a) do seu educando, juntamente com mestrandos do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa que são professores em formação e estão a realizar a sua prática de ensino supervisionada na escola, irão gravar em vídeo algumas aulas ao longo do ano letivo. Estas aulas, por serem pensadas especificamente para a turma em que serão lecionadas, enquadram-se no trabalho habitual com a turma. Adicionalmente, parte destas aulas têm por objetivo promover o raciocínio matemático dos alunos e podem trazer benefícios para a aprendizagem do seu educando.

A investigação no âmbito do projeto REASON envolve a recolha de dados por observação destas aulas preparadas pelo(a) professor(a) e pelos mestrandos (com gravação de vídeo) e a recolha de documentos produzidos pelos alunos.

Como é que os dados pessoais do meu educando serão salvaguardados?

Os dados pessoais recolhidos são confidenciais, tendo acesso a estes dados apenas os professores em formação, o professor da turma e membros da equipa do projeto. Alguns pequenos excertos de vídeo das aulas serão visionados num contexto restrito com os professores em formação e os formadores, com a intenção de apoiar a reflexão dos formandos sobre a prática de ensino da Matemática. Será garantido o anonimato dos alunos através do uso de pseudónimos, e no caso de serem utilizadas imagens ou excertos das aulas, os rostos dos alunos serão desfocados ou tapados de modo a não serem reconhecidos. Assim, os dados pessoais do seu educando não serão divulgados em nenhuma publicação ou comunicação resultante do estudo.

Os dados serão utilizados e divulgados com respeito pelas normas éticas na investigação desenvolvida pelas várias instituições envolvidas no projeto. Os dados serão armazenados durante a duração do projeto, sendo posteriormente apagados ou destruídos. Em caso de reclamação sobre a utilização dos dados pessoais do seu educando, deve ser contactado o Encarregado de Proteção de Dados do Instituto de Educação, Professor Doutor Carlos Ribeiro, Vice-Reitor da Universidade de Lisboa.

[1] O Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores é financiado através de fundos nacionais pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (Projeto IC&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017)

U Lisboa | ie Instituto de Educação | Politécnico de Lisboa Escola Superior de Educação de Lisboa | IPS | FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

REASON

Raciocínio Matemático e Formação de Professores

A participação do meu educando nesta investigação é obrigatória?

A participação do seu educando nesta investigação é voluntária e requer o seu consentimento escrito. Pode, a qualquer momento, desistir da participação do seu educando sem necessidade de apresentar um motivo. ***Para indicar se dá o seu consentimento à participação do seu educando na investigação, por favor, preencha o formulário de resposta, em anexo, e devolva-o ao(à) professor(a) de Matemática do seu educando.***

Note-se que os alunos que não desejem participar na investigação serão mantidos fora do alcance da câmara de vídeo quando estivermos a gravar as aulas de Matemática. No entanto, apreciaríamos a sua resposta positiva, uma vez que consideramos que esta investigação pode contribuir para compreender como os professores podem promover o raciocínio matemático dos alunos. Consequentemente, acreditamos que a concretização desta investigação pode contribuir para a qualidade do ensino da Matemática no nosso país, assim como promover as aprendizagens dos alunos nesta disciplina.

Como poderei saber mais acerca desta investigação?

Para mais informações sobre o projeto ou sobre a participação do seu educando nesta investigação, por favor contacte a equipa do projeto, coordenada pelo Professor Doutor João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa:

Email: reason@ie.ulisboa.pt Tel.: 217943674

O coordenador do Projeto REASON,

(Professor Doutor João Pedro da Ponte)

ULisboa | Instituto de Educação | Politécnico de Lisboa – Escola Superior de Educação de Lisboa | IPS Instituto Politécnico de Setúbal – Escola Superior de Educação | FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

REASON
Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Consentimento informado, livre e esclarecido

Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Confirmo que li e compreendi a informação que me foi entregue sobre a investigação do projeto REASON.

Estou informado(a) que a participação do meu educando é voluntária e autorizo a sua participação no projeto de investigação no ano letivo 2019-2020.

Tomei conhecimento que o nome do meu educando ou qualquer outro elemento que o identifique não irá aparecer em nenhuma publicação.

Finalmente, compreendo que, se tiver alguma questão sobre a investigação poderei contactar a equipa do Projeto REASON.

☐ **Dou** o meu consentimento para a participação do meu educando (nome do aluno em maiúsculas):

____

na investigação do Projeto REASON.

☐ **Não dou** o meu consentimento para a participação do meu educando (nome do aluno em maiúsculas):

____

na investigação do Projeto REASON.

Nome do encarregado de educação (em maiúsculas): ______________________________

Assinatura do Encarregado de Educação:

Data: ___/___/______

Escola: ____

Nome do(a) professor(a): ______________________________________

Anexo 17: Termo de consentimento informado dirigido ao Sr. Diretor do Colégio Militar

REASON
Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Exmo(a). Sr(a). Diretor(a),

É com enorme prazer que informamos que Anabela Candeias, se encontra a frequentar a oficina de formação *Promover o raciocínio matemático dos alunos do 3.º ciclo do ensino básico*[1]. Esta oficina de formação é promovida pelo **projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores**, da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), coordenado pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte, professor catedrático do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, e financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (Projeto IC&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Informamos ainda que os alunos do mestrado em Ensino da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa que se encontram a realizar a sua Prática de Ensino Supervisionado nesta escola estão igualmente envolvidos no projeto REASON.

O Projeto REASON pretende estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o desenvolvimento desse conhecimento pelos professores e futuros professores dos ensinos básico e secundário. Esta investigação é muito importante uma vez que pode contribuir para explorar formas de apoiar os professores a promover o raciocínio matemático dos seus alunos.

Gostaríamos de contar com a sua autorização para a recolha de dados em aulas lecionadas pela professora Anabela Candeias ou por Sara Nunes. Será ainda requerido o consentimento por escrito aos Encarregados de Educação, que anexamos a este documento.

As aulas a observar são planificadas pelo professor da turma ou pelos mestrandos com o apoio do professor da turma. Estas planificações têm em consideração os conteúdos matemáticos que estão a ser abordados com a turma e as características da turma.

No âmbito do projeto REASON, pretendemos observar estas aulas e recolher dados com os objetivos de (1) observar a prática do professor em sala de aula para analisar tanto as suas ações como as consequentes ações dos alunos onde se evidencie o raciocínio matemático e (2) ilustrar situações de sala de aula nas quais o professor promova o raciocínio matemático dos alunos, tendo em vista a discussão destas situações no âmbito das experiências de formação.

[1] Esta oficina de formação encontra-se acreditada pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua (CCPFC) e é coordenada pela Professora Doutora Leonor Santos, professora associada com agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Como serão recolhidos os dados?

A recolha de dados em sala de aula incluirá com uma grelha de observação de aula e o registo vídeo das aulas. Ocasionalmente, contará com a presença de um investigador do projeto REASON, que não participa na dinâmica da aula.

Como será assegurado o anonimato dos participantes?

Os registos vídeo, bem como quaisquer outros dados recolhidos serão de uso e acesso exclusivo da equipa do projeto REASON e das atividades desenvolvidas no âmbito do mestrado em Ensino da Matemática. Quaisquer informações que venham a ser divulgadas referentes a estas aulas, nomeadamente transcrições ou registos de produções escritas dos alunos, serão anónimas, sendo garantido que não é divulgado qualquer dado pessoal dos alunos ou qualquer outro elemento identificativo, nomeadamente a identidade da escola e do(a) professor(a).

A data limite de armazenamento dos dados recolhidos está prevista para 2022 (término do projeto), momento em que serão apagados e/ou destruídos. A qualquer momento o encarregado de educação de qualquer aluno participante pode solicitar que quaisquer dados pessoais do seu educando sejam destruídos ou apagados.

Os procedimentos desenvolvidos são pautado pelas normas éticas na investigação desenvolvida pelo Instituto de Educação da Universidades de Lisboa[2] e respeitam o Regulamento Europeu de Proteção de Dados Pessoais[3] (EU, 2016). Assim, será solicitado aos encarregados de educação dos alunos envolvidos o consentimento informado, livre e esclarecido para a participação dos seus educandos no estudo e respetiva recolha de dados.

Sendo um estudo em meio escolar, foi solicitado um pedido de autorização à DGE?

Foi solicitado um pedido de autorização à Direção-Geral de Educação. Contudo, fomos informados pela Direção-Geral de Educação que "a DGE não é competente para autorizar a realização de intervenções educativas/desenvolvimento de projetos e atividades/programas de intervenção/formação, em meio escolar e particularmente em sala de aula, em tempo curricular, dadas as competências da Escola/Agrupamento, nos domínios da organização pedagógica, da organização curricular, da gestão estratégica, da planificação das atividades, entre outras. Os órgãos de gestão pedagógica e educativa, (Direção, . . .) melhor decidirão sobre a aprovação do Projeto e ações subsequentes."

---

[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (2016) *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Obtido de http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (2016) *Investigação e ética no IE: Guia prático para contactar com entidades da ULisboa e externas*. Obtido de http://www.ie.ulisboa.pt/download/boas-praticas-sobre-investigacao-e-etica-no-ie
[3] Regulamento (UE) N.º 2016/679, de 27 de abril de 2016 (Regulamento Europeu de Proteção de Dados Pessoais): https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PT/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2016:119:FULL&from=EN

REASON
Raciocínio Matemático e Formação de Professores

Quem poderei contactar se precisar de mais informações?

Para mais informações sobre o projeto ou sobre a participação nesta investigação, por favor contacte a equipa do projeto, coordenada pelo Professor Doutor João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa:

Email: reason@ie.ulisboa.pt Tel.: 217943674

Assim, vimos **solicitar a autorização para a observação e recolha de dados nestas aulas**.

O coordenador do projeto REASON,

(Professor Doutor João Pedro da Ponte)